Elemente der Analysis II
Übungsblatt 2: Lösungen

Ü7 Wegen $\langle 0, u \rangle = 0$ ist

$$0 = \langle au + bv + cw, u \rangle = a\langle u, u \rangle + b\langle v, u \rangle + c\langle w, u \rangle$$
$$= a\|u\|^2 + b \times 0 + c \times 0 = a\|u\|^2.$$

Weil $\|u\|^2 = 1$, ist also $a = 0$. Genauso

$$0 = \langle au + bv + cw, v \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle v, v \rangle + c\langle v, w \rangle$$
$$= b\|v\|^2 = b$$ und

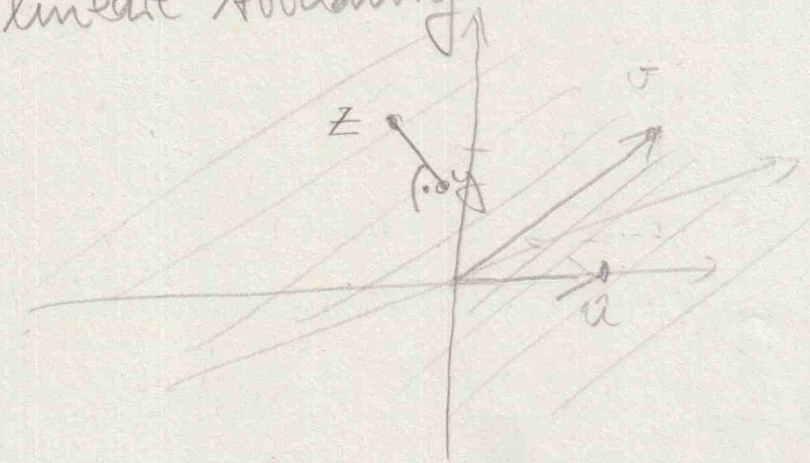
$$0 = \langle au + bv + cw, w \rangle = c\|w\|^2 = c.$$

Ü8 (1) $x = au + bv$, $y = \alpha u + \beta v$

$$\Rightarrow sx + ty = sau + sbv + t\alpha u + t\beta v$$
$$= (sa + t\alpha)u + (sb + t\beta)v \in E(u, v)$$

(2) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2) \longmapsto x_1 u + x_2 v$
ist lineare Abbildung mit Bild $T(\mathbb{R}^2) = E(u, v)$

(3)



Ü9 $\|z-y\| = \min\{\|z-x\| : x \in E(u,v)\}$

(2) Sei $x \in E(u,v)$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist wegen Ü3 (1) auch $-y+tx \in E(u,v)$. Also

$$f(t) = \|z-y+tx\|^2 \geq \|z-y\|^2.$$

Andererseits

$$f(t) = \|(z-y)+tx\|^2 = \|z-y\|^2 + 2\langle z-y, tx\rangle + t^2\|x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad 2t\langle z-y, x\rangle + t^2\|x\|^2 \geq 0.$$

Dies wird minimal, falls $f'(t)=0$, also

$$0 = f'(t) = 2\langle z-y, x\rangle + 2t\|x\|^2$$

Ist $x = 0 \in \mathbb{R}^3$, so gilt immer $\langle z-y, 0\rangle = 0$, und sonst folgt $t = -\frac{\langle z-y, x\rangle}{\|x\|^2}$ und Einsetzen liefert

$$0 \leq -2\frac{\langle z-y, x\rangle^2}{\|x\|^2} + \frac{\langle z-y, x\rangle^2}{\|x\|^2}$$

$$= -\frac{\langle z-y, x\rangle^2}{\|x\|^2}.$$

Dies gilt aber nur, falls $\langle z-y, x\rangle = 0$.

Ü10 $M: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $M(x) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

(1) $M(x) \leq \|x\|$:

Für jedes $k \in 1, \dots, n$ gilt

$$|x_k| = \sqrt{x_k^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\|, \text{ also}$$

$$M(x) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \leq \|x\|$$

(2) $\|x\| \leq \sqrt{n}\, M(x)$:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{M(x)^2 + \dots + M(x)^2}$$

$$= \sqrt{n\, M(x)^2} = \sqrt{n}\, M(x)$$

Bemerkung: $M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt auch „Maximumnorm" und oft schreibt man $M(x) = \|x\|_\infty$.

Es gilt $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ und $\|ax\|_\infty = |a|\,\|x\|_\infty$.

M ist „nicht euklidischer Abstand" zwischen x und 0.