Elemente der Analysis II

Lösungen zum Übungsblatt 1

Ü1: $\|x+y+z\|^2 = \|(x+y)+z\|^2 = \|x+y\|^2 + 2\langle x+y, z\rangle + \|z\|^2$

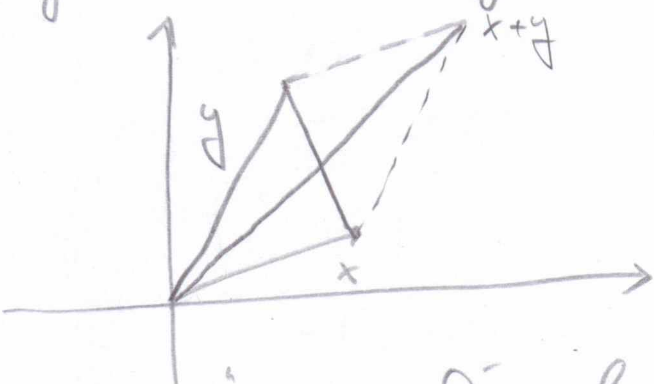
$= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + 2\langle x,z\rangle + 2\langle y,z\rangle + \|z\|^2$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 + 2\langle x,y\rangle + 2\langle x,z\rangle + 2\langle y,z\rangle$

Ü2: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 + 2\langle x,-y\rangle + \|-y$

$= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Interpretation im $\mathbb{R}^2$: x, y sind zwei der vier Kanten eines Parallelogramms mit Diagonalen $x+y$ und $x-y$:

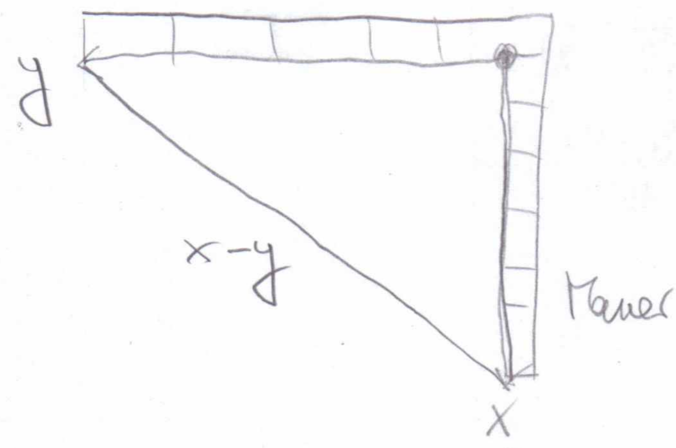


Die Summe der Quadrate der Längen der Diagonalen ist also die Summe der Längen der vier Kanten.

Ü3 Die Kanten der Ecken interpretieren wir als zwei-dimensionale Vektoren x, y. Die Ecke ist genau dann rechtwinklig, wenn $x \perp y$ wegen Pythagoras.

Mit dem Zollstock misst der Handwerker an der einen Kante 3 m (oder dezimeter) und an der anderen

4 m, so dass $\|x\| = 3$ und $\|y\| = 4$



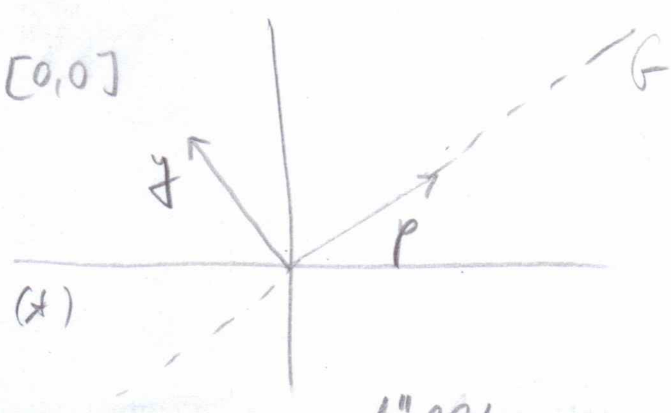
Er misst nun die Länge $\|x-y\|$. Wegen

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 = 3^2 - 2\langle x,y\rangle + 4^2$$

gilt $x \perp y \iff \langle x,y\rangle = 0 \iff \|x-y\|^2 = 3^2+4^2=5$

$\iff \|x-y\| = 5$.

<u>Ü4</u> $G = \{\alpha p : \alpha \in \mathbb{R}\}$ sei Ursprungsgerade



Wir suchen $y = [y_1, y_2] \neq [0,0]$

so dass $y \perp p$ also

$$0 = \langle y,p\rangle = y_1p_1 + y_2p_2 \quad (*)$$

Dies ist offenbar für $y = [-p_2, p_1]$ erfüllt.

Wir zeigen nun $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \perp y\}$

„$\subseteq$" Ist $x = \alpha p$ so gilt $\langle x,y\rangle = \langle \alpha p,y\rangle = \alpha\langle p,y\rangle = 0$

„$\supseteq$" Sei andererseits $x = [x_1, x_2]$ mit $\langle x,y\rangle = 0$. Dann

ist $0 = x_1y_1 + x_2y_2 = -p_2x_1 + p_1x_2$ also

$p_1x_2 = p_2x_1$

Ist $p_1 \neq 0$, so folgt

$x_2 = \frac{x_1}{p_1} p_2 = a p_2$ mit $a = \frac{x_1}{p_1}$. Wegen

$a p_1 = x_1$ ist dann $a p = [a p_1, a p_2] = [x_1, x_2] = x$

also $x \in G$.

Ist andererseits $p_2 \neq 0$, so folgt

$x_1 = \frac{x_2}{p_2} p_1 = a p_1$ mit $a = \frac{x_2}{p_2}$ und wegen $a p_2 = x_2$

folgt $x = a p$, also auch in diesem Fall $x \in G$.

Ü5 (Statistische Interpretation von $\bar{x}$)

$E(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ Erwartungswert

$K(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(x))(y_k - E(y))$ Kovarianz

$V(x) = K(x,x)$ Varianz

(i) $K(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k y_k - E(x) y_k - x_k E(y) + E(x) E(y) \right)$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \frac{E(x)}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k - \frac{E(y)}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(x) E(y)$

$= E(x \cdot y) - E(x) E(y) - E(y) E(x) + E(x) E(y)$

$= E(x \cdot y) - E(x) E(y)$.

(ii) Nach 1.11 ist die Steigung der Ausgleichsgeraden zu den Daten $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ gegeben durch

$$a = \frac{\langle x, y \rangle - n \bar{x} \bar{y}}{\|x\|^2 - n \bar{x}^2}$$

Nach Definition ist $\langle x, y \rangle = n E(x \cdot y)$ so dass

$\langle x,y\rangle - n\bar{x}\bar{y} = n\,E(x\cdot y) - n\,E(x)E(y) = n\,K(x,y)$

Speziell für $x=y$ folgt

$\|x\|^2 - n\bar{x}^2 = \langle x,x\rangle - n\bar{x}\bar{x} = n\,K(x,x) = n\,V(x)$,

also $a = \dfrac{K(x,y)}{V(x)}$.

<u>Ü6</u> $u=[1,1,1]$, $v=[1,2,2]$, $w=[1,2,3]$

Sei $x=[x_1,x_2,x_3]$ fest. Für $a,b,c\in\mathbb{R}$ gilt dann

$x = au+bv+cw \iff$

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 = a+b+c & (1)\\ x_2 = a+2b+2c & (2)\\ x_3 = a+2b+3c & (3)\end{array}\right. \quad \underset{\substack{(2)-(1)\\(3)-(2)}}{\iff} \quad \begin{array}{l} x_1 = a+b+c\\ x_2-x_1 = b+c\\ x_3-x_2 = c\end{array}$$

$\iff c = x_3-x_2$, $b = x_2-x_1-c = 2x_2-x_1-x_3$

$a = x_1-(b+c) = x_1-(x_2-x_1) = 2x_1-x_2$

Also hat x genau eine Darstellung $au+bv+cw$.