J. Wengenroth

SS 2009
15.07.2009

Elemente der Analysis II
Lösung der Probeklausur

Aufgabe 1
Addition der 3. Gleichung zur 1. und des zweifachen der 3. Gleichung zur zweiten liefert, dass das LGS äquivalent ist zu

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & 6y & & & = & 17 \\ 5x & - & 3y & & & = & 11 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 10 \end{array}$$

Subtraktion des doppelten der zweiten Gleichung von der ersten:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -5x & & & & & = & -5 \\ 5x & - & 3y & & & = & 11 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 10 \end{array}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 1$, damit und der zweiten folgt $-3y = 6$, also $y = -2$, und die dritte Gleichung impliziert $z = 2 + 4 - 10 = -4$.

Aufgabe 2

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(x,y) & D_2 f_1(x,y) \\ D_1 f_2(x,y) & D_2 f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

Wegen Übungsaufgabe 14 ist die Jacobi-Matrix genau dann invertierbar, wenn $2y^2 \neq 2x^2 \iff x \neq y$ und $x \neq -y$.

Aufgabe 3
Wegen Satz 6.5 genügt es zu zeigen, dass die Hesse-Matrix in jedem Punkt positiv definit ist.

$D_1 f(x,y) = 2xe^{x^2+y}$, $D_2 f(x,y) = e^{x^2+y}$,

$D_1(D_1 f)(x,y) = 2e^{x^2+y} + 4x^2 e^{x^2+y} = (2 + 4x^2)e^{x^2+y}$,

$D_2(D_1 f)(x,y) = 2xe^{x^2+y} = D_1(D_2 f)(x,y)$.

$D_2(D_2 f)(x,y) = e^{x^2+y}$. Also

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} (2+4x^2)e^{x^2+y} & 2xe^{x^2+y} \\ 2xe^{x^2+y} & e^{x^2+y} \end{bmatrix}.$$

Wegen Übungsaufgabe 34 ist $H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ positiv definit, falls $a \geq 0$ und $ac \geq b^2$. Hier ist $a = (2+4x^2)e^{x^2+y} > 0$, weil beide Faktoren positiv sind und $ac = (2+4x^2)(e^{x^2+y})^2 > 4x^2(e^{x^2+y})^2 = b^2$. Also ist f konvex.

Aufgabe 4
Notwendig ist $\nabla f(x,y) = 0$.

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= \tfrac{(1+x^2+y^2)-(x+y)2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \tfrac{1-x^2+y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ D_2 f(x,y) &= \tfrac{(1+x^2+y^2)-(x+y)2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \tfrac{1+x^2-y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Also $\nabla f(x,y) = 0 \iff 1-x^2+y^2-2xy = 0$ und $1+x^2-y^2-2xy = 0$ Subtraktion der Gleichungen impliziert $-2x^2+2y^2 = 0$ also $x^2 = y^2$ und daher $x = y$ oder $x = -y$.
Falls $x = -y$, ist $f(x,y) = 0$ nicht maximal. Falls $x = y$, folgt durch Einsetzen $1+x^2-y^2-2x^2 = 0$, also $x^2 = 1/2$. Die kritischen Punkte sind also $a = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.
Weil $f(b) < 0$ und $f(a) > 0$, ist der maximale Funktionswert $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \frac{2/\sqrt{2}}{1+1/2+1/2} = 1/\sqrt{2}$.

Aufgabe 5
Wegen des Satzes von Lagrange ist notwendig

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla \phi(x,y,z), \text{also } [yz, xz, xy] = \lambda[2x, 2y, 2z].$$

Damit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} yz &= 2\lambda x \\ xz &= 2\lambda y \\ xy &= 2\lambda z \end{aligned}$$

Multiplikation der Gleichungen mit x bzw. y bzw. z liefert

$$xyz = 2\lambda x^2 = 2\lambda y^2 = 2\lambda z^2.$$

Falls $\lambda = 0$, folgt $f(x,y,z) = 0$, und dieser Wert ist nicht maximal. Also $x^2 = y^2 = z^2$ und die Nebenbedingung liefert $x^2 = y^2 = z^2 = 1/3$, also $x, y, z \in \{1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}\}$, und der zugehörige Funktionswert ist $(1/\sqrt{3})^3$ oder $-(1/\sqrt{3})^3$. Das Maximum ist also $(1/\sqrt{3})^3$.

Aufgabe 6
Für $\varphi(t) = t^2$ liefert die Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx &= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} e^{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 e^t 2t dt \underset{\text{partiell}}{=} 2te^t\Big|_{t=1}^2 - 2\int_1^2 e^t dt \\ &= 4e^2 - 2e - 2(e^2 - e) = 2e^2. \end{aligned}$$