

9. Übung zur LINEAREN ALGEBRA

Abgabe: bis Montag, 22.06.15, 12 Uhr in Kasten E 12.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

A33: (3 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen Teilräume des $\mathbb{R}^4$ sind:

- (i) $L := \left\{ x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : \sum_{j=1}^4 x_j = 0 \right\},$
- (ii) $M := \left\{ x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : \sum_{j=1}^4 x_j^2 = 0 \right\},$
- (iii) $N := \left\{ x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 \right\}.$

A34: (3+1+3 Punkte)

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und X_1, X_2 Vektorräume über K . Auf $X := X_1 \times X_2$ seien $+: X \times X \rightarrow X$ und $\cdot: K \times X \rightarrow X$ definiert durch

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \\ \alpha \cdot (x_1, x_2) &= (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2)\end{aligned}$$

für $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$ und $\alpha \in K$.

- (i) Überlegen Sie sich, dass $(X, +, \cdot)$ ein K -Vektorraum ist, indem Sie exemplarisch das Assoziativ- und Kommutativgesetz bzgl. $+$ sowie eines der Distributivgesetze nachweisen.
- (ii) Zeigen Sie: Die Projektionen $\pi_{X_1}: X \rightarrow X_1, (x_1, x_2) \mapsto x_1$ und $\pi_{X_2}: X \rightarrow X_2, (x_1, x_2) \mapsto x_2$ sind Epimorphismen.
- (iii) Beweisen Sie zudem: Ist W ein weiterer K -Vektorraum, so gibt es für alle $S \in \mathcal{L}(W, X_1)$ und $T \in \mathcal{L}(W, X_2)$ genau ein $S \times T \in \mathcal{L}(W, X)$ mit $S = \pi_{X_1} \circ (S \times T)$ sowie $T = \pi_{X_2} \circ (S \times T)$.

A35: (1+2+1 Punkte)

Seien L, M Teilräume eines K -Vektorraumes X . Beweisen Sie:

- (i) $L \cap M \subseteq X$.
- (ii) Genau dann ist $L \cup M \subseteq X$, wenn $L \subseteq M$ oder $M \subseteq L$.
- (iii) $L + M \subseteq X$. (Für Mengen A, B ist $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$.)

A36: (3 Punkte)

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ (über $\mathbb{R}$) sowie den Teilraum

$$L := \left\{ [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : \alpha x_1 + \beta x_2 = 0 \right\}$$

für $\alpha \neq 0$. Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 / L, \\ t &\mapsto A \begin{bmatrix} t, 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

ein Isomorphismus gegeben ist (wobei wie in der Vorlesung $A[x] = \{x + l : l \in L\}$).