J. Wengenroth / M. Müller

SoSe 2015
08.06.2015

8. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Montag, 15.06.15, 12 Uhr in Kasten E 12.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

A29: (3 Punkte)

Es sei $\mathcal{D} := \{A \in K^{n\times n} \colon A \text{ ist Diagonalmatrix}\}$. Zeigen Sie, dass ein $A \in \mathcal{D}$ genau dann invertierbar ist, wenn die Diagonaleinträge von A alle ungleich 0 sind. Bestimmen Sie für eine invertierbare Matrix $A = [a_{j,k}]_{j,k\in\{1,\dots,n\}} \in \mathcal{D}$ die Inverse.

A30: (3+3+2 Punkte)

Sei $\mathcal{U} := \{A \in K^{n\times n} \colon A \text{ ist untere Dreiecksmatrix}\}$ (d.h. $a_{j,k} = 0$ für $j < k$).

(i) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ ein Ring ist.

(ii) Sei $X \in K^{n\times n}$ eine strikte untere Dreiecksmatrix, d.h. $x_{j,k} = 0$ für $j \leq k$. Zeigen Sie, dass dann $X^n := \underbrace{X \cdot \ldots \cdot X}_{n-\text{mal}} = 0$ gilt. (Es bezeichne $\left[x_{j,k}^{(m)}\right]_{j,k}$ die Matrix X^m für $m \in \mathbb{N}$. Es reicht, zu zeigen: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $x_{j,k}^{(m)} = 0$ für $j < k + m$.)

(iii) Es sei nun $A \in \mathcal{U}$ gegeben mit $a_{j,j} = 1$ und $a_{j,k} \in \mathbb{Z}$ ($j, k \in \{1, \dots, n\}$). Zeigen Sie, dass A invertierbar ist mit $A^{-1} \in \mathcal{U}$ und dass A^{-1} ebenfalls nur ganzzahlige Einträge hat. (Hinweis: $A = E_n - X$ und geometrische Summenformel verwenden)

A31: (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K^{2\times 2}$ genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$ ist, und dann

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

gilt.

A32: (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung (gemäß der Konstruktion in der Vorlesung) von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 10 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

und damit A^{-1}.