J. Wengenroth / M. Müller SoSe 2015

01.06.2015

7. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Montag, 08.06.15, 12 Uhr in Kasten E 12.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

A25: (5 Punkte)

Es seien

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle möglichen Matrixprodukte (auch von Matrizen mit sich selbst).

A26: (4 Punkte)

Es seien $m, n, p \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A = [a_{j,k}]_{\substack{j\in\{1,\ldots,m\} \\ k\in\{1,\ldots,n\}}} \in K^{m\times n}$. Die Matrix $B = [b_{j,k}]_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\} \\ k\in\{1,\ldots,m\}}} \in K^{n\times m}$, wobei

$$b_{j,k} := a_{k,j} \qquad (j \in \{1,\ldots,n\}, k \in \{1,\ldots,m\}),$$

heißt transponierte Matrix zu A (Schreibweise: $A^T := B$). Ferner heißt eine Matrix A symmetrisch, falls $A = A^T$ gilt.

(i) Sind für die Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ die Produkte AB oder BA symmetrisch?

(ii) Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ die Produkte AA^T und A^TA.

(iii) Zeigen Sie: Für $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times p}$ gilt $(AB)^T = B^TA^T$.

(iv) Wieso sind für $A \in K^{m\times n}$ die Produkte AA^T und A^TA symmetrisch?

A27: (4 Punkte)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.

(i) Es seien $A, B \in K^{n\times n}$ Diagonalmatrizen, d. h. $a_{i,j} = 0 = b_{i,j}$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass AB und BA Diagonalmatrizen sind und $AB = BA$ gilt.

(ii) Es sei $A \in K^{m\times n}$. Weiter seien $D \in K^{m\times m}$ und $F \in K^{n\times n}$ Diagonalmatrizen. Zeigen Sie: $DA = \begin{bmatrix} d_{11}a^1 \\ \vdots \\ d_{m,m}a^m \end{bmatrix}$ und $AF = [f_{11}a_1, \ldots, f_{n,n}a_n]$.

(iii) Finden Sie ein $B \in K^{n\times n}$, so dass für alle $A \in K^{m\times n}$

$$AB = [0, \dots, 0, a_j, 0, \dots, 0]$$

gilt, wobei a_j (j-te Spalte von A) auch im Produkt AB an j-ter Stelle stehen soll.

A28: (7 Punkte)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $Z(a, b)$ definiert durch

$$Z(a, b) := \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Ferner bezeichne $\mathcal{C}$ die Menge aller Matrizen dieser Gestalt.

(i) Berechnen Sie $Z(0, 1) \cdot Z(0, 1)$.

(ii) Berechnen Sie für $Z(a, b)$, $Z(c, d) \in \mathcal{C}$ die Matrizen $Z(a, b) + Z(c, d)$ und $Z(a, b) \cdot Z(c, d)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{C} \to \mathcal{C}$, $z \mapsto \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{bmatrix}$, eine bijektive Abbildung mit

$$\varphi(z + w) = \varphi(z) + \varphi(w),$$
$$\varphi(z \cdot w) = \varphi(z) \cdot \varphi(w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist.

(iv) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist.