J. Wengenroth / M. Müller SoSe 2015
18.05.2015

6. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Montag, 01.06.15, 12 Uhr in Kasten E 12.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

A21: (5 Punkte)

Es seien $z = 3 - 2i$ und $w = 4 + 3i$ gegeben.

(i) Geben Sie zw, $\overline{z}w$, z/w, $z/\overline{w}$, $1/i$ in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an (so genannte Normaldarstellung).

(ii) Zeigen Sie: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$, gilt

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - iy) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

(iii) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 = |z|^2$?

A22: (3 Punkte)

Skizzieren Sie folgende Mengen in der komplexen Ebene. (Ihr Lösungsweg muss erkennbar sein.)

(i) $A := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(iz) \leq 1, 1 < \operatorname{Im}(iz) < 2\}$,

(ii) $B := \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{z+i}{2-i}\right) = 1\right\}$.

A23: (3 Punkte)

Wir betrachten die Punkte $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 1 + i/2,\ z_4 = i/2$ in der komplexen Ebene, die Eckpunkte eines Rechtecks sind. Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := 2iz$ und $g(z) := (1 + i)z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Skizzieren Sie das Rechteck und die Punkte $f(z_j)$ sowie $g(z_j)$ für $1 \leq j \leq 4$. Beschreiben Sie, welche Auswirkung die Anwendung der Funktionen hat.

A24: (7 Punkte)

Geben Sie die Lösungsmenge zu folgenden Gleichungssystemen an (bei Teil (ii) in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$):

(i)

$$\begin{array}{rrrcl} 2ix_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 4 + 2i, \\ -x_1 & & +ix_3 & = & \frac{3}{2}i, \\ & -ix_2 & +2x_2 & = & 3. \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 1, \\ 2x_1 & +\alpha x_2 & +6x_3 & = & 6, \\ -x_1 & +3x_2 & +(\alpha - 3)\,x_3 & = & 0. \end{array}$$