

4. Übung zur LINEAREN ALGEBRA

Abgabe: bis Montag, 11.05.15, 12 Uhr in Kasten E 12.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

A13: (4+4 Punkte)

- (a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen Monoide oder gar Gruppen sind. (Begründen Sie Ihre Antworten.)

(i) $(\mathbb{Z}, \cdot)$,

(ii) $(2\mathbb{Z}, +)$, wobei $2\mathbb{Z} := \{x : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 2k\}$.

(iii) $(\mathbb{N}_0, *)$, wobei

$$\begin{aligned} n * m &= n, & \text{für } n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0, \\ 0 * m &= m, & \text{für } m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

- (b) Zeigen Sie, dass $\text{Aut}(M) := \{f : M \rightarrow M : f \text{ bijektiv}\}$ genau dann abelsch ist, wenn M höchstens zwei Elemente besitzt.

A14: (3 Punkte)

Es seien $(X, \cdot)$ ein Monoid und $G := \{x \in X : x \text{ ist invertierbar}\}$. Zeigen Sie, dass für $x, y \in G$ schon $x \cdot y \in G$ und $x^{-1} \in G$ folgt. Inwiefern „ist“ G eine Gruppe.

A15: (2 Punkte + 4 Bonuspunkte)

Es seien X eine Menge und $\cdot : X \times X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ eine assoziative Verknüpfung.

- (a) Beweisen Sie: Ist $(X, \cdot)$ eine Gruppe, so haben für alle $a, b \in X$ die Gleichungen

$$a \cdot x = b \quad \text{und} \quad y \cdot a = b$$

genau eine Lösung x und y in X .

- (b) Es sei $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie: Wenn für alle $a, b \in X$ die Gleichungen

$$a \cdot x = b \quad \text{und} \quad y \cdot a = b$$

(mindestens) eine Lösung x und y in X haben, dann ist $(X, \cdot)$ eine Gruppe.

A16: (6 Punkte)

(i) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

- (ii) Welche Gleichheit vermuten Sie für $\sum_{k=1}^n k(k+1) \cdots (k+m)$, wobei $m \in \mathbb{N}$ fest ist? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

(iii) Leiten Sie ähnliche Formeln für $\sum_{k=1}^n k^2$ und $\sum_{k=1}^n k^3$ her.