J. Wengenroth / M. Müller

SoSe 2015
27.04.2015

3. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Montag, 04.05.15, 12 Uhr in Kasten E 12.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

A9: (3 Punkte)

Schreiben Sie wie in 1.6(b,c) folgende Funktionen als Komposition von Funktionen:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x^2 - 1)^2$,

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x^4 + x^2 + x$,

(iii) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin((\cos(x^2 - x)))$.

A10: (6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x \mapsto (x + 3, x - 4)$,

(ii) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 3, x_2 - 4)$,

(iii) $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 \cdot x_2, x_1 - x_2)$.

A11: (4 Punkte)

Wir nennen eine Menge M Dedekind-endlich, wenn es keine injektive Abbildung von M in eine echte Teilmenge von M gibt. Es sei nun M eine Dedekind-endliche Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist.

A12: (5 Punkte)

Beweisen Sie Satz 1.8(b) aus der Vorlesung: Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $X \neq \emptyset$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) f ist injektiv.

(2) Für alle Abbildungen $g, h : W \to X$ mit $f \circ g = f \circ h$ gilt $g = h$.

(3) Für alle $A \subseteq X$ gilt $A = f^{-1}(f(A))$.

(4) Es gibt eine Abbildung $l : Y \to X$ mit $l \circ f = \mathrm{id}_X$.

(Um unnötige Beweisschritte zu vermeiden, zeigen Sie am besten: (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). Für (3) $\Rightarrow$ (4) fixiere man $x_0 \in X$ und definiere $l(y) = x_0$ für $y \notin f(X)$, und für $y \in f(X)$ zeige man, dass es genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.)