J. Wengenroth / M. Müller

SoSe 2015
20.04.2015

2. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Montag, 27.04.15, 12 Uhr in Kasten E 12.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!
Tackern oder heften Sie bitte die abgegebenen Zettel zusammen!

A5: (4 Punkte)

Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $M, N \subseteq Y$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Aus $M \subseteq N$ folgt $f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N)$.

(ii) $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$ und $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.

(iii) $f^{-1}(M \backslash N) = f^{-1}(M) \backslash f^{-1}(N)$.

A6: (6 Punkte)

Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Weiter seien $A, B \subseteq X$ und $M \subseteq Y$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Aus $A \subseteq B$ folgt $f(A) \subseteq f(B)$.

(ii) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ und $f(f^{-1}(M)) \subseteq M$.

(iii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ und $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(iv) $f(A \backslash B) \supseteq f(A) \backslash f(B)$. Zeigen Sie zudem, dass im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

A7: (5 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(i) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x$,

(ii) $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto x^4$,

(iii) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \begin{cases} -\frac{x}{2}, & \text{falls } x \text{ gerade (d.h. } \exists m \in \mathbb{N} : x = 2m) \\ \frac{x-1}{2}, & \text{falls } x \text{ ungerade (d.h. } \exists m \in \mathbb{N} : x = 2m-1), \end{cases}$

(iv) $k : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \begin{cases} -\frac{x}{2}, & \text{falls es ein } m \in \mathbb{N}_0 \text{ gibt mit } x = 2m \\ \frac{x-1}{2}, & \text{falls es ein } m \in \mathbb{N} \text{ gibt mit } x = 2m-1. \end{cases}$

A8: (4 Punkte)

Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Widerlegen oder beweisen Sie:

(i) Wenn $g \circ f$ bijektiv ist, dann ist auch f oder g bijektiv.

(ii) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f oder g injektiv.