J. Wengenroth / M. Müller SoSe 2015

06.07.2015

12. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Montag, 13.07.15, 12 Uhr in Kasten E 12.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

A45: (2+1+2 Punkte)

Es seien X, Y, Z Vektorräume über einem Körper K und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ sowie $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.

(i) Beweisen Sie: $\operatorname{Rang}(S \circ T) \leq \min\{\operatorname{Rang}(S), \operatorname{Rang}(T)\}$. (Betrachten Sie $H = S|_{\operatorname{Bild}(T)}$.)

(ii) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $<$ bei der Ungleichung aus (i) gilt.

(iii) Zeigen Sie folgende Implikationen:

(a) Ist T ein Epimorphismus, so gilt $\operatorname{Rang}(S \circ T) = \operatorname{Rang}(S)$.

(b) Ist S ein Monomorphismus, so gilt $\operatorname{Rang}(S \circ T) = \operatorname{Rang}(T)$.

A46: (4 Punkte)

Es sei $A \in K^{m \times n}$ mit LR-Zerlegung $PA = LR$ wie in Satz 3.8 (also P Permutationsmatrix, L untere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen 1 und R in Zeilenstufenform). Zeigen Sie, dass $\operatorname{Rang}(A)$ gleich der Anzahl von 0 verschiedenen Zeilen von R ist. (Tipp: 4.16.(b) und A45)

A47: (2+2 Punkte)

Es seien X ein K-Vektorraum und $S, T \in \mathcal{L}(X, X)$. Dann heißen S und T ähnlich, wenn ein invertierbares $A \in \mathcal{L}(X, X)$ existiert mit $A \circ S = T \circ A$. Wir schreiben dann $S \sim T$.

(i) Zeigen Sie:

(a) Aus $S \sim T$ und $T \sim R$ folgt $S \sim R$.

(b) Aus $S \sim T$ folgt $\operatorname{Rang}(S) = \operatorname{Rang}(T)$.

(ii) Ein $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von $S \in \mathcal{L}(X, X)$, wenn es ein $x \in X \setminus \{0\}$ gibt mit $S(x) = \lambda x$. Zeigen Sie, dass ähnliche Endomorphismen (d.h. $S, T \in \mathcal{L}(X, X)$ mit $S \sim T$) gleiche Eigenwerte haben.

A48: (3 Punkte)

Es seien X, Y Vektorräume über einem Körper K, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein Isomorphismus, $A = (a_1, \ldots, a_n)$ eine Basis von X und $(a_1^*, \ldots, a_n^*)$ die duale Basis von X^*. Zeigen Sie, dass

$$T^*\left(T(a_j)^*\right) = a_j^*$$

für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, wobei $\left(T(a_1)^*, \ldots, T(a_n)^*\right)$ die zu $\left(T(a_1), \ldots, T(a_n)\right)$ duale Basis in Y^* bezeichnet.