J. Wengenroth / M. Müller SoSe 2015
29.06.2015

11. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Montag, 06.07.15, 12 Uhr in Kasten E 12.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

A41: (2+1+1 Punkte)

Gegeben seien die linearen Abbildungen $S, T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$S(x) := \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}, \qquad T(x) := \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie Kern (S) und Kern (T) sowie deren Dimension.

(ii) Untersuchen Sie S und T auf Surjektivität.

(iii) Geben Sie eine Basis von Kern (S) und Bild (T) an.

A42: (2+2+1 Punkte)

Es seien X, Y Vektorräume über einem Körper K, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $B \subseteq X$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Ist B ein Erzeugendensystem von X und T ein Epimorphismus, so ist $T(B)$ ein Erzeugendensystem von Y.

(ii) Ist B linear unabhängig in X und T ein Monomorphismus, so ist $T(B)$ linear unabhängig in Y.

(iii) Ist T ein Isomorphismus, so gilt: B ist Basis in $X \Leftrightarrow T(B)$ ist Basis in Y.

A43: (3 Punkte)

Seien $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$ ein Intervall mit $a < b$ und voneinander verschiedene $x_0, x_1 \in I$ gegeben. Zeigen Sie: Bei jeder Wahl von Zahlen $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gibt es genau ein $p \in \mathcal{P}_3$ mit

$$\begin{aligned} p(x_0) &= z_0, \quad p'(x_0) = z_1, \\ p(x_1) &= z_2, \quad p'(x_1) = z_3. \end{aligned}$$

(Verwenden Sie ohne Beweis: Wenn $p \in \mathcal{P}_3$ und weder p noch p' die Nullfunktion ist, dann ist die Anzahl der Nullstellen von p höchstens 3, wobei die Stellen, die Nullstellen von p und p' sind, doppelt gezählt werden.)

A44: (1+2+2+1 Punkte)

Gegeben seien die lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

und Basen

$$B_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad B_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

(i) Geben Sie die Abbildungsvorschrift von T in der Form $T(x) = Ax$ an ($x \in \mathbb{R}^3$), wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(ii) Berechnen Sie $M_{B_1}^{B_1}(T)$.

(iii) Bestimmen Sie die Übergangsmatrizen von B_1 nach B_2 (also $M_{B_1}^{B_2}(\mathrm{id})$) und von B_2 nach B_1 (also $M_{B_2}^{B_1}(\mathrm{id})$).

(iv) Berechnen Sie mithilfe von (ii) und (iii) auch $M_{B_2}^{B_2}(T)$.