J. Wengenroth / M. Müller SoSe 2015
22.06.2015

10. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Montag, 29.06.15, 12 Uhr in Kasten E 12.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

A37: (2+2 Punkte)

Prüfen Sie, ob in $\mathbb{R}^4$ die Vektoren w, x, y, z linear unabhängig sind

(i) $w = [1,3,2,6]^T$, $x = [0,3,1,12]^T$, $y = [1,0,2,6]^T$, $z = [0,0,1,0]^T$;

(ii) $w = [1,3,2,6]^T$, $x = [0,3,1,12]^T$, $y = [1,0,2,6]^T$, $z = [0,0,1,12]^T$.

A38: (2+2+2 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt eine Abbildung

$$p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k,$$

wobei $\alpha_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \{0, \dots, n\}$, Polynom (genauer: Polynomfunktion). Ist $\alpha_n \neq 0$, so heißt n der Grad von p. Im Falle $\alpha_k = 0$ für alle $k \in \{0, \dots, n\}$ wird p der Grad $-\infty$ zugeordnet. Wir setzen

$$\mathcal{P}_n := \left\{ p \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}} \colon p \text{ ist Polynom vom Grad } \leq n \right\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}_n$ ein Teilraum von $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ über $\mathbb{C}$ ist.

(ii) Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $p_k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $p_k(z) := z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Prüfen Sie, ob durch $B = \{p_k \colon k \in \{0, \dots, n\}\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_n$ gegeben ist. (Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass ein Polynom p vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ höchstens n Nullstellen besitzt, d.h. es gibt höchstens n verschiedene $z_1, \dots z_n$ mit $p(z_i) = 0$ $(i \in \{1, \dots, n\})$.)

(iii) Es sei $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$, $p \mapsto p'$ eine Abbildung, wobei p' für $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ durch

$$p'(z) = \sum_{k=1}^{n} k \alpha_k z^{k-1}$$

definiert sei (Ableitung von p). Zeigen Sie, dass D linear ist (d.h. für $p, q \in \mathcal{P}_n$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt $(\alpha p + q)'(z) = \alpha p'(z) + q'(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$).

A39: (3 Punkte)

(i) Inwiefern „ist“ jeder $\mathbb{R}$-Vektorraum auch $\mathbb{Q}$-Vektorraum?

(ii) Zeigen Sie: Nicht jeder $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist auch $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(iii) Prüfen Sie, ob 1 und $\sqrt{2}$ linear unabhängig im Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ sind.

A40: (2+2 Punkte)

Es seien A, B Mengen, $\psi\colon A \to B$ eine Abbildung und K ein Körper. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung

$$\Phi\colon K^B \to K^A,\ f \mapsto f \circ \psi$$

ist linear (d.h. zu zeigen: für $f, g \in K^B$ und $\alpha \in K$ gilt $\Phi(\alpha f + g)(a) = \alpha \Phi(f)(a) + \Phi(g)(a)$ für alle $a \in A$).

(ii) ψ ist genau dann surjektiv, wenn Φ Monomorphismus ist. (Satz 1.8 hilft!)