J. Wengenroth / M. Müller SoSe 2015
11.05.2015

5. Übung zur Linearen Algebra

Abgabe: bis Montag, 18.05.15, 12 Uhr in Kasten E 12.

Versehen Sie bitte Ihre Lösungen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

A17: (3 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k\,(k+1)}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}.$$

(Tipp: Bei (i) hilft es, $\frac{k+1-k}{k(k+1)}$ anstelle von $\frac{1}{k(k+1)}$ zu betrachten. Eine ähnliche Überlegung ist auch bei (ii) nützlich.)

A18: (3 Punkte)

Beweisen Sie: Sind $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $x, y \in R$, so gelten

(i) $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$,

(ii) $(-x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$,

(iii) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

A19: (5 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Für alle $x, y \in G$ gilt $x^2 * y^2 = (x * y)^2$ genau dann, wenn $(G, *)$ kommutativ ist. ($x^2 := x * x$)

(ii) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Für alle $x, y \in R$ gilt $x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y)$ genau dann, wenn $(R, +, \cdot)$ kommutativ ist.

(iii) Ist $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring, so gilt

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

für alle $x, y \in R$ und $n \in \mathbb{N}$.

A20: (9 Punkte)

Wir betrachten $\left(\mathbb{Z}^3, \oplus, \odot\right)$. Für $(a, b, c), (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ seien die Verknüpfungen, wie folgt, definiert

$$\begin{aligned}(a, b, c) \oplus (x, y, z) &= (a + x, b + y, c + z)\,,\\ (a, b, c) \odot (x, y, z) &= (a \cdot x, a \cdot y + b \cdot z, c \cdot z)\,,\end{aligned}$$

wobei $+$ und $\cdot$ die übliche Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}$ bezeichnen.

(i) Zeigen Sie, dass $\left(\mathbb{Z}^3, \oplus, \odot\right)$ ein Ring ist.

(ii) Bestimmen Sie (mit Begründung) die Menge der invertierbaren Elemente aus $\left(\mathbb{Z}^3, \odot\right)$.

(iii) Ist $\left(\mathbb{Z}^3, \oplus, \odot\right)$ kommutativ? (Begründen Sie Ihre Antwort.)