Prof. Dr. J. Wengenroth 25.02.2014

Einführung in die Mathematik
Lösungen der Klausuraufgaben

Aufgabe 1

(a) Die Ungleichung kann man entweder mit vollständiger Induktion und

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n} \geq 2\binom{2n}{n}$$

zeigen oder (für $n \in \mathbb{N}$) auch durch

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)\ldots(2n-n+1)}{n!} = \frac{2n}{n}\,\frac{2n-1}{n-1}\,\frac{2n-2}{n-2}\cdots\frac{n+1}{1} \geq 2^n,$$

weil $\frac{2n-k}{n-k} \geq 2$ für $k \in \{0,\ldots,n-1\}$.

(b) Mit vollständiger Induktion. Für $n = 0$ ist die Summe gleich 0, und die rechte Seite ist ebenfalls 0. Die Aussage sei nun für ein $n \in \mathbb{N}_0$ wahr. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k(k-1)2^{k-2} &= (n+1)n2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n} k(k-1)2^{k-2}\\ &= (n^2+n)2^{n-1} + 2^{n-1}(n^2-3n+4) - 2 = 2^{n-1}(2n^2-2n+4) - 2\\ &= 2^n(n^2-n+2) - 2 = 2^{(n+1)-1}((n+1)^2 - 3(n+1) + 4) - 2,\end{aligned}$$

weil $(n+1)^2 - 3(n+1) + 4 = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 4 = n^2 - n + 2$.

Aufgabe 2

(a) $x_n = (n+i\pi)^n n^{-n+1/2} = (1+\frac{i\pi}{n})^n \sqrt[n]{n} \to e^{i\pi} = -1$.

(b) Wegen der Stetigkeit von cos und $1/n \to 0$ gilt $\cos(1/n) \to \cos(0) = 1$. Außerdem konvergiert $n^2 e^{-\sqrt{n}} = n^2/e^{\sqrt{n}}$ gegen 0, weil $e^{\sqrt{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}^k}{k!} \geq \frac{n^3}{6!}$. Also folgt $y_n = \frac{n^2 e^{-\sqrt{n}}}{\cos(1/n)} \to 0$.

(c)

$$\begin{aligned} z_n = n^\alpha(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= n^\alpha \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= n^\alpha \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = n^\alpha \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = n^{\alpha-1/2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= n^{\alpha-1/2}\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}.\end{aligned}$$

Die Folge der zweiten Faktoren konvergiert gegen 1/2, also konvergiert die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn die Folge $(n^{\alpha-1/2})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, was zu $\alpha \leq 1/2$ äquivalent ist. Für $\alpha = 1/2$ gilt $z_n \to 1/2$ und für $\alpha < 1/2$ gilt $z_n \to 0$.

Bis hier hätte man 15 Punkte erreichen und damit die Klausur bestehen können!

(d) Falls die Folge überhaupt konvergiert, so erfüllt der Grenzwert $\omega_\infty \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\omega_\infty = 1 + 1/\omega_\infty$, also $\omega_\infty^2 - \omega_\infty - 1 = 0$ und $\omega_\infty = 1/2 \pm \sqrt{1/4+1} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Wegen $\omega_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ muss auch der potentielle Grenzwert positiv sein, also $\omega_\infty = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq \frac{1+\sqrt{4}}{2} = 3/2$. Um tatsächlich die Konvergenz zu beweisen zeigen wir: $\quad (*) \qquad |\omega_n - \omega_\infty| \leq 1/\omega_\infty^{n+1}$.

Für $n = 0$ ist dies wahr, weil $|\omega_0 - \omega_\infty| = |1 - \omega_\infty| = \omega_\infty - 1 = 1/\omega_\infty$. Stimmt $(*)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so auch für $n+1$, weil

$$\begin{aligned}|\omega_{n+1} - \omega_\infty| &= |1 + 1/\omega_n - (1 + 1/\omega_\infty)| = \left|\frac{\omega_\infty - \omega_n}{\omega_n \omega_\infty}\right| \\ &\leq \frac{|\omega_\infty - \omega_n|}{\omega_\infty} \leq 1/\omega_\infty^{n+2}.\end{aligned}$$

Wegen $1/\omega_\infty < 1$ gilt $(1/\omega_\infty)^n \to 0$, und mit $(*)$ folgt tatsächlich $\omega_n \to \omega_\infty$.

Aufgabe 3

(a) Mit $a_n = \frac{n!}{n^n}(2i)^n$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!(2i)^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}n!(2i)^n}\right| = \left|\frac{2i}{(1+\frac{1}{n})^n}\right| \to 2/e.$$

Wegen $e > 2$ ist dieser Grenzwert < 1 und das Quotientenkriterium liefert die absolute Konvergenz der Reihe und damit auch die Konvergenz.

(b) Wegen $p > 0$ ist $\frac{1}{n^p \log(n)}$ eine monotone Nullfolge, und das Leibniz-Kriterium liefert daher die Konvergenz. Für die absolute Konvergenz können wir wegen der Monotonie obiger Folge das Verdichtungskriterium anwenden. Die Reihe konvergiert also genau dann absolut, wenn folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^p \log(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n n \log(2)}.$$

Für $p > 1$ wird diese Reihe durch die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ mit $q = 1/2^{p-1} < 1$ majorisiert, ist also konvergent. Für $p = 1$ erhält man die divergente harmonische Reihe und für $p < 1$ ist die Reihe divergent, weil die Summanden nicht gegen 0 konvergieren (oder auch weil die harmonische Reihe eine divergente Minorante ist).

(c) Mit $\omega = iz^2$ ist die Reihe gleich $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}}\omega^n$. Diese Reihe hat Konvergenzradius 1, zum Beispiel weil $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}} \leq 1$, und weil die Koeffizientenfolge monoton gegen 0 konvergiert, ist die Reihe wegen des Abel-Kriteriums für alle $\omega \in \mathbb{C}$ mit $|\omega| \leq 1$ und $\omega \neq 1$ konvergent.

Die zu untersuchende Reihe konvergiert also, falls $|iz^2| \leq 1$ und $iz^2 \neq 1$. Dies ist äquivalent zu $|z| \leq 1$ und $z^2 \neq -i$ (also $z \neq \pm(i-1)/\sqrt{2}$).

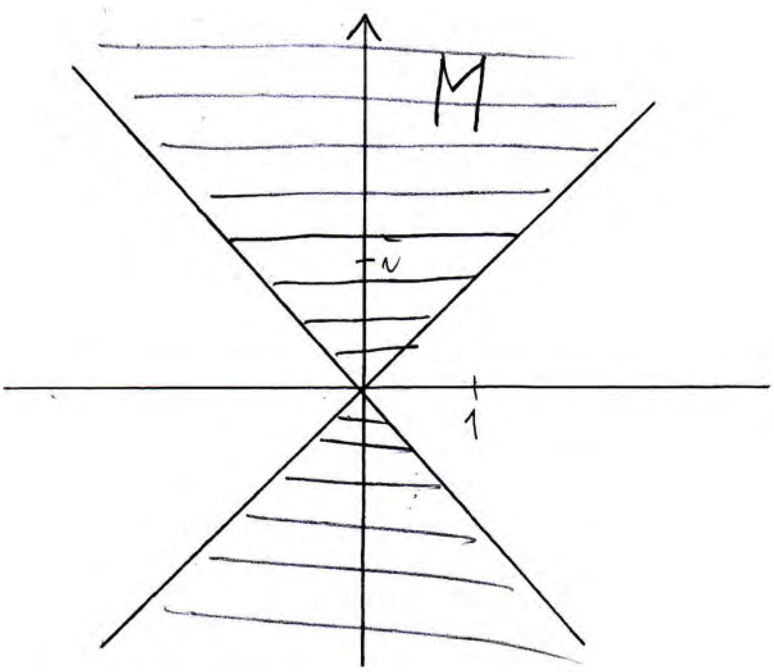
Für $iz^2 = 1$ ist die Reihe divergent, weil die harmonische Reihe eine divergente Minorante für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}}$ ist.

Für $|z| > 1$ ist die Reihe divergent, weil die Summanden nicht gegen 0 konvergieren.

Die Reihe konvergiert genau dann absolut, wenn $|z| < 1$: Ist dies der Fall, so ist die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z^2|^n$ konvergente Majorante für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{\sqrt{\log(n+1)}} z^{2n}\right|$, und falls $|z| \geq 1$ ist die harmonische Reihe eine divergente Minorante.

Aufgabe 4 (4+3 Punkte)

(a) Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt $|\exp(z^2)| = \exp(Re(z^2)) = \exp(x^2 - y^2) \leq 1$ genau dann, wenn $x^2 - y^2 \leq 0$, was zu $|x| \leq |y|$ äquivalent ist. Also ist entweder $y \geq |x|$ (d.h. der Imaginärteil y ist „oberhalb" des Graphen der Funktion $x \mapsto |x|$) oder $y \leq -|x|$ (d.h. y ist unterhalb des Graphen von $x \mapsto -|x|$):



Die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |\exp(z^2)|$ ist als Verknüpfung stetig, und weil $]-\infty, 1]$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist, ist $M = g^{-1}(]-\infty, 1])$ in $\mathbb{C}$ abgeschlossen. M ist nicht offen, weil M^c nicht abgeschlossen ist: Es gilt $z_n = 1/n \in M^c$ und $z_n \to 0 \notin M^c$.

Schließlich ist M nicht kompakt, weil M unbeschränkt ist: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $ix \in M$ mit $|ix| = |x|$, was beliebig groß wird.

(b) f ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, weil dort $x \mapsto 1/x$ stetig ist und f somit stetig als Produkt von Verknüpfungen stetiger Funktionen.

Die Stetigkeit in $\xi = 0$ folgt zum Beispiel aus Aufgabe 6 (a) der Probeklausur oder auch direkt: Für $\varepsilon > 0$ sei $\delta = \varepsilon$. Für $|x - \xi| \leq \delta$ folgt dann aus $|\sin(1/x)| \leq 1$, dass $|f(x) - f(\xi)| \leq |x - \xi| < \varepsilon$.

Aufgabe 5

g ist stetig als Produkt von Verknüpfungen stetiger Funktionen. Um die Surjektivität zu zeigen, sei $w \in \mathbb{C}$. Falls $w = 0$, ist $w = g(1)$, und andernfalls gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $w = |w|e^{i\alpha}$. Für $z(r) = re^{i\alpha}$ mit $r > 0$ ist dann $g(z(r)) = re^{i\alpha}\log(r) = r\log(r)e^{i\alpha}$, und dies ist gleich w, falls $r\log(r) = |w|$. Um so ein $r > 0$ zu finden benutzen wir den Zwischenwertsatz: Die Funktion $f : [1, \infty[\to]0, \infty[$, $r \mapsto r\log(r)$ ist stetig mit $f(1) = 0 < |w|$ und $f(e + |w|) \geq |w|\log(e) = |w|$, also gibt es ein $r \in]1, e + |w|[$ mit $f(r) = |w|$.

Die Funktion g ist nicht injektiv, weil zum Beispiel $g(1) = g(-1) = 0$.

Aufgabe 6

(a) ist wahr: Wegen der Stetigkeit von f und der Offenheit von $]-\infty, 1[$ in $\mathbb{R}$ ist $B = \{x \in X : f(x) < 1\}$ offen und außerdem in A enthalten. Weil $\mathring{A}$ die größte offene Teilmenge von A ist, folgt $B \subseteq \mathring{A}$.

(b) ist falsch zum Beispiel für die konstante Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ (mit beliebigem $X \neq \emptyset$): Dann ist $A = X$ offen, also $A = \mathring{A} = X$, aber $B = \emptyset$.

(c) ist falsch: Seien zum Beispiel $X =]0, \infty[$ mit dem Betragsabstand, $f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$ und $x_n = 1/n$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge (zum Beispiel, weil sie in $\mathbb{R}$ konvergiert) aber $f(x_n) = n$ konvergiert nicht.

(d) ist wahr: Wegen der Folgenvollständigkeit von $\mathbb{R}$ reicht es zu zeigen, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$. Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge ist gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \delta$ für alle $n, m \geq N$, also gilt $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.