Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

Klausur vom 19. Juli 2010: Aufgaben und Lösungsvorschläge

Aufgabe 1
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \exp(x^2) dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)} dx,$ (beachten Sie $\cos^2 = 1 - \sin^2$),

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\exp(\zeta)}{\zeta} d\zeta$ für die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{it}$.

Lösung 1

(a) Mit partieller Integration erhält man

$$\int_0^1 x^3 \exp(x^2) dx = \int_0^1 x^2 (x \exp(x^2)) dx = x^2 \frac{\exp(x^2)}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 x \exp(x^2) dx$$
$$= \frac{e}{2} - \frac{\exp(x^2)}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

(b) Wegen $\cos^2 = 1 - \sin^2$, $\cos > 0$ auf $[0, \pi/4]$ und $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ ist

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} dx = \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/4)} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$$
$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1-y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y} dy = \frac{1}{2}\Big(\log(1+y) - \log(1-y)\Big)\Big|_0^{1/\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}\right)$$

Alternativ kann man $1/\cos = \cos/(1 - \sin^2)$ sowie die Stammfunktion artanh von $1/(1-y^2)$ benutzen.

(c) Die Cauchysche Integralformel für $f = \exp$ und $z = 0$ liefert

$$\int_\gamma \frac{\exp(\zeta)}{\zeta} d\zeta = 2\pi i \exp(0) = 2\pi i.$$

Aufgabe 2
Zeigen Sie die folgenden zwei Aussagen:

(a) $0 \leq x - \log(x+1) \leq x^2/2$ für alle $x \geq 0$,

(b) $\arctan(1/x) = \pi/2 - \arctan(x)$ für alle $x > 0$.

Lösung 2

(a) Seien $f(x) = x - \log(x+1)$ und $g(x) = x^2/2 - x + \log(x+1)$. Dann müssen wir $f(x) \geq 0$ und $g(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ zeigen, wozu es wegen $f(0) = g(0) = 0$ reicht, $f'(x) \geq 0$ und $g'(x) \geq 0$ nachzuweisen (weil f und g dann monoton wachsen). In der Tat ist $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \geq 0$ für $x \geq 0$, weil dann $x + 1 \geq 1$ also $1/(x+1) \leq 1$. Außerdem gilt

$$g'(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} \geq 0.$$

(b) Sei nun $f(x) = \arctan(1/x) + \arctan(x)$. Wir müssen $f(x) = \pi/2$ zeigen, was wegen $\arctan(1) = \pi/4$ für $x = 1$ stimmt. Außerdem ist

$$f'(x) = \frac{1}{1+(1/x)^2}(1/x)' + \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{x^2+1}\left(\frac{-1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

so dass f konstant ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Funktion $F :]0,\infty[\to \mathbb{R}, z \mapsto \int\limits_0^1 \frac{x^z - 1}{\log(x)} dx$ differenzierbar ist und dass $F(z) - F(1) = \log(1+z) - \log(2)$ für alle $z > 0$ gilt.

Lösung 3
Sei $f : [0,1] \times]0,\infty[\to \mathbb{R}, (x,z) \mapsto \frac{x^z-1}{\log(x)}$ für $x \neq 0$ und $f(0,z) = 0$. Dann ist $f(\cdot, z)$ für jedes $z > 0$ stetig also integrierbar über $[0,1]$, $f(x,\cdot)$ ist differenzierbar mit Ableitung (nach z)

$$f'(x,z) = \left(\frac{\exp(z\log(x)) - 1}{\log(x)}\right)' = \exp(z\log(x)) = x^z$$

für $x \neq 0$ und $f'(0,z) = 0$, und diese Funktion $f' : [0,1] \times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist stetig. Also gilt wegen des Satzes über die Differenziation von Parameterintegralen

$$F'(z) = \int\limits_0^1 f'(x,z)dx = \int\limits_0^1 x^z dx = \frac{x^{z+1}}{z+1}\Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{z+1} = \log(1+z)'.$$

Daher ist $F(z) - \log(1+z)$ konstant, was $F(z) - F(1) = \log(1+z) - \log(2)$ impliziert.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass

a) das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \cos(x^\alpha)dx$ für alle $\alpha > 1$ existiert aber für $\alpha = 1$ nicht,

b) die durch $x_n = \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\log(k)}\right) - \log(\log(n))$ Folge konvergiert.

Lösung 4

(a) Für $\alpha > 1$ liefert die Substitution $x = y^{1/\alpha}$

$$\int_1^b \cos(x^\alpha)dx = \int_1^{b^\alpha} \cos(y)\frac{1}{\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}-1}dy = \frac{1}{\alpha}\int_1^{b^\alpha} \frac{\cos(y)}{y^\beta}dy$$

mit $\beta = 1 - 1/\alpha > 0$. Daher reicht es zu zeigen, dass $\cos(y)/y^\beta$ über $[1, \infty[$ uneigentlich integrierbar ist, was wir mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums nachweisen. Für $\varepsilon > 0$ und $b > a > 1$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \frac{\cos(y)}{y^\beta}dy\right| &= \left|\frac{\sin(y)}{y^\beta}\Big|_a^b + \beta\int_a^b \frac{\sin(y)}{y^{\beta+1}}dy\right| \\ &\le \frac{1}{b^\beta} + \frac{1}{a^\beta} + \beta\int_a^b \frac{1}{y^{\beta+1}}dy = \frac{1}{b^\beta} + \frac{1}{a^\beta} + \left(\frac{-1}{y^\beta}\right)\Big|_a^b = \frac{2}{a^\beta}\end{aligned}$$

und dies ist $< \varepsilon$ für a genügend groß.

Für $\alpha = 1$ existiert das uneigentliche Integral nicht, weil $\int_1^b \cos(x)dx = \sin(b) - \sin(1)$ für $b \to \infty$ nicht konvergiert.

(b) Weil $f(x) = \frac{1}{x\log(x)}$ monoton fällt, konvergiert wegen des Reihenvergleichskriteriums die Folge $\sum_{k=2}^{n-1} f(k) - \int_2^n f(x)dx$. Wir müssen also nur noch das Integral ausrechnen. Mit der Substitution $x = e^y$ erhalten wir

$$\int_2^n \frac{1}{x\log(x)}dx = \int_{\log(2)}^{\log(n)} \frac{1}{e^y y}e^y dy = \int_{\log(2)}^{\log(n)} \frac{1}{y}dy = \log(\log(n)) - \log(\log(2)).$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $R(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^3(x+2)}$.

Lösung 5

Nach 8.6 ist

$$R(x) = S(x) + \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{(x-1)^2} + \frac{a_3}{(x-1)^3} + \frac{b}{x+2}$$

mit einem Polynom S und Zahlen a_1, a_2, a_3 und $b \in \mathbb{C}$.

Dabei sind die a_k die $(3-k)$-ten Taylorkoeffizienten von $R_1(x) = (x-1)^3 R(x) = \frac{x^3}{x+2}$ im Punkt $z_1 = 1$, also $a_3 = R_1(1) = 1/3$,

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{R_1'(1)}{1!} = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2}\Big|_{x=1} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}\Big|_{x=1} = \frac{8}{9} \text{ und} \\
a_1 &= \frac{R_1''(1)}{2!} = \frac{(6x^2+12x)(x+2)^2 - (2x^3+6x^2)2(x+2)}{2\cdot(x+2)^4}\Big|_{x=1} \\
&= \frac{18\cdot 3^2 - 8\cdot 6}{2\cdot 3^4} = \frac{19}{27}.
\end{aligned}$$

Weiter ist $b = (x+2)R(x)\Big|_{x=-2} = -8/(-3)^3 = 8/27$, und schließlich ist $S = 0$, weil der Nennergrad von R größer als der des Zählers ist.

Aufgabe 6

(a) Für $\lambda \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \exp(\langle \lambda, x\rangle)$. Bestimmen Sie in jedem Punkt $\xi \in \mathbb{R}^n$ alle Richtungsableitungen und zeigen Sie $D_v f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \lambda \perp v$.

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \log(x^2+y^2)$. Zeigen Sie, dass die Funktion g auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ total differenzierbar ist und dass $D_1(D_1 g) + D_2(D_2 g) = 0$ gilt.

Lösung 6

(a) Wir berechnen zuerst die partiellen Ableitungen:

$$D_j f(x) = D_j \exp\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \lambda_j \exp\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \lambda_j f(x).$$

Weil alle D_j stetig sind, ist f total differenzierbar, und wir erhalten für $v \in \mathbb{R}^n$

$$D_v f(x) = \langle v, \nabla f(x)\rangle = \sum_{j=1}^n v_j \lambda_j f(x) = \langle v, \lambda\rangle f(x).$$

Wegen $f(x) > 0$ folgt insbesondere $D_v f(x) = 0 \iff \langle v, \lambda\rangle = 0 \iff v \perp \lambda$.

(b) Es gilt $D_1 g(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$ und $D_2 g(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$. Weil diese partiellen Ableitungen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig sind, ist g total differenzierbar. Weiter ist

$$D_1 D_1 g(x,y) = \frac{2(x^2+y^2) - 2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und durch Rollentausch $D_2 D_2 g(x,y) = 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Also ist $D_1 D_2 g + D_2 D_2 g = 0$.