Aufgabe 1
Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der durch

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{xy}\cos(z) \\ e^{xz}\sin(y) \end{bmatrix}$$

definierten Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Ist diese Matrix invertierbar?

Aufgabe 2
Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= -3 \\ x + y + 2z &= 3 \\ 3x - 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 3
Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 6.5 und Übungsaufgabe 34, dass die durch

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^3$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2$ konvex ist. (Tipp: Nicht ausmultiplizieren!)

Aufgabe 4
Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^e \frac{\log(x)}{x^2}dx$. (Tipp: $\frac{1}{e^t} = e^{-t}$)

Aufgabe 5
Bestimmen Sie

$$\min\{e^{x+y+2z} : x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$$

unter der Annahme (die Sie nicht zu zeigen brauchen), dass dieses Minimum tatsächlich angenommen wird.

Aufgabe 6
Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \frac{x + y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

nimmt ihr Minimum an (das müssen Sie nicht beweisen). Bestimmen Sie diesen minimalen Funktionswert.