Übungen zu Funktionalanalysis

Blatt 11

Besprechung in der Übung am 26. Januar, 8:30 in E44

Aufgabe 35.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so dass die kanonische Einbettung $J: X \to X''$, $x \mapsto \delta_x$ aus Aufgabe 32 surjektiv ist. Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\sigma(X, X')$-kompakt ist und dass X ein Banach-Raum ist. Wegen Aufgabe 32 (d) charakterisiert diese Kompaktheit also die Surjektivität von J.

Aufgabe 36.

Zeigen Sie für jeden normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ (mit Hilfe des Satzes von Alaoğlu), dass es einen kompakten topologischen Raum Ω gibt und eine lineare Isometrie $J : (X, \|\cdot\|) \to (C(\Omega), \|\cdot\|_\Omega)$, d.h. jeder normierte Raum „ist“ Teilraum eines $C(\Omega)$.

Aufgabe 37.

Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $H(U)$ der Raum der holomorphen Funktionen auf U versehen mit den Halbnormen $p_n(f) = \sup\{|f(z)| : z \in K_n\}$, wobei K_n eine kompakte Ausschöpfung von U ist. Zeigen Sie den Satz von Montel: Jede beschränkte Teilmenge M von $H(U)$ ist relativ kompakt.

Hinweis: Wegen des Metrisierbarkeitskriteriums und Satz 3.5 ist relative Kompaktheit äquivalent zur Präkompaktheit, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ wird M durch endlich viele Kugeln $B_{p_n}(f, \varepsilon)$ überdeckt. Zeigen Sie dies mit Hilfe des Satzes von Arzelá-Ascoli für die Räume $C(K_n)$ und der Cauchyschen Integralformel für Kreise.