J. Wengenroth
N. Kenessey, M. Riefer

SS 2012
11.07.2012

Funktionalanalysis
Übungsblatt 11
Abgabe: Mittwoch, 18.07.2012, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Seien $A \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ und $\Lambda(A)$ wie auf dem Blatt 8, also $0 < a_{n,k} \leq a_{n+1,k}$ und

$$\Lambda(A) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}|x_k| < \infty < \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\Lambda(A)$ ein Schwartz-Raum ist, falls

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : \lim_{k\to\infty} \frac{a_{n,k}}{a_{m,k}} = 0.$$

Aufgabe 2
Seien X, Y zwei lokalkonvexe Räume. Zeigen Sie, dass $\mathscr{K}(X,Y)$ ein (beidseitiges) Ideal in $L(X,Y)$ ist, d.h. ein Untervektorraum, so dass für alle lokalkonvexen Räume E, F und $T \in \mathscr{K}(X,Y)$, $A \in L(E,X)$, $B \in L(Y,F)$ gilt

$$T \circ A \in \mathscr{K}(E,Y) \quad \text{und} \quad B \circ T \in \mathscr{K}(X,F).$$

Aufgabe 3
Seien $(X\mathscr{P}), (Y,\mathscr{Q})$ lokalkonvexe Räume und $(Y,\mathscr{Q})$ Hausdorff.

(i) Zeigen Sie $\mathscr{F}(X,Y) = \{T \in L(X,Y) : \dim(T(X)) < \infty\} \subseteq \mathscr{K}(X,Y)$.

(ii) Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, so ist $\mathscr{K}(X,Y)$ in $L(X,Y)$ bezüglich der Operator-Norm $|||T||| = \{\sup \|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$ abgeschlossen.

Hinweis: Zeigen Sie für $T \in \mathscr{K}(X,Y)$ die Präkompaktheit von $\{T(x) : \|x\|_X \leq 1\}$.

Aufgabe 4
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $k \in L_2(\Omega\times\Omega, \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}, \mu\otimes\mu)$. Zeigen Sie, dass der durch

$$Tf(x) = \int_{\Omega} f(y)k(x,y)d\mu(y)$$

definierte Operator $T : L_2(\Omega,\mathscr{A},\mu) \to L_2(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ kompakt ist.
Hinweis: Benutzen Sie die Aufgabe 3 sowie die Tatsache, dass die lineare Hülle der Menge $L = \{\mathbb{I}_{A\times B} : \mu(A), \mu(B) < \infty\}$ dicht in $L_2(\mu\otimes\mu)$ ist (dies darf man ohne Beweis, der im Wesentlichen ein Dynkin-Argument ist, benutzen).