

Funktionalanalysis
Übungsblatt 10

Abgabe: Mittwoch, 11.07.2012, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1

Seien $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Obermenge von K . Zeigen Sie (für $\|f\|_\Omega = \sup\{|f(z)| : z \in \Omega\}$), dass $M = \{f|_K : f \in H(\Omega), \|f\|_\Omega \leq 1\}$ in $(C(K), \|\cdot\|_K)$ relativ kompakt ist.

Hinweis: Für die gleichgradige Stetigkeit benutze man um $z_0 \in K$ die Cauchy-sche Integralformel für einen kleinen Kreis um z_0 .

Aufgabe 2

Ein lokalkonvexer Raum $(X, \mathcal{P})$ heißt Schwartz-Raum, wenn für jedes $p \in \mathcal{P}$ ein $q \in \mathcal{P}$ existiert, so dass $B_q(0, 1)$ bezüglich p präkompakt ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $E \subseteq B_q(0, 1)$ endlich mit $B_q(0, 1) \subseteq \bigcup_{x \in E} B_p(x, \varepsilon)$.

- (a) Zeigen Sie, dass in Fréchet-Schwartz-Räumen abgeschlossene beschränkte Mengen stets kompakt sind.

Hinweis: Wegen 3.10.d reicht es die Präkompaktheit zu zeigen.

- (b) Für jedes offene $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist $H(\Omega)$ mit $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_K : K \subseteq \Omega \text{ kompakt}\}$ ein Fréchet-Schwartz-Raum.

Hinweis: Man verwende die Aufgabe 1 für L mit $K \subseteq \overset{\circ}{L}$.

- (c) Unendlichdimensionale Banach-Räume sind nicht Schwartz.

Aufgabe 3

Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $(X', \|\cdot\|')$ das normierte Dual sowie $X'' = (X', \|\cdot\|')'$ und

$$J : X \rightarrow X'', x \mapsto \delta_x$$

mit $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$. Wegen der Aufgabe 1 auf dem Blatt 3 definiert J eine Isometrie (also $\|\delta_x\|'' = \|x\|$). Zeigen Sie, dass J genau dann surjektiv ist, wenn $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ eine $\sigma(X, X')$ -kompakte Menge ist.

Hinweis: Man überlege sich, dass $J : (X, \sigma(X, X')) \rightarrow (X'', \sigma(X'', X'))$ stetig und offen auf sein Bild ist und dass $B^{\circ\circ} = \{\Phi \in X'' : \|\Phi\|'' \leq 1\}$ gilt. Wegen des Bipolarenatzes ist dann $B^{\circ\circ} = J(B)^{\bullet\circ} = \overline{J(B)}^{\sigma(X'', X')}$. Außerdem ist $B^{\circ\circ}$ wegen des Satzes von Alaöglu $\sigma(X'', X')$ -kompakt.

Aufgabe 4

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $(X, \mathcal{P})$ ein Fréchet-Raum. Wir versehen $C(\Omega, X)$ mit den Halbnormen $p_K(f) = \sup\{p(f(x)) : x \in K\}$, wobei $K \subseteq \Omega$ kompakt und $p \in \mathcal{P}$. Zeigen Sie, dass jede punktweise relativ kompakte und gleichgradig stetige Menge $M \subseteq C(\Omega, X)$ bereits relativ kompakt ist.

Hinweis: Wenn man zeigt, dass $C(\Omega, X)$ ein Fréchet-Raum ist, reicht es die Präkompaktheit von M zu zeigen. Diese folgt wiederum aus dem Satz von Arzelá-Ascoli.

Bonusaufgabe [10 Sonderpunkte]

Was passiert, wenn $(X, \mathcal{P})$ bloß metrisierbar, aber womöglich unvollständig ist?