J. Wengenroth
N. Kenessey, M. Riefer

SS 2012
27.06.2012

Funktionalanalysis
Übungsblatt 9
Abgabe: Mittwoch, 04.07.2012, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Seien $z_n \in \mathbb{C}$ mit $|z_n| < |z_{n+1}| \to \infty$. Zeigen Sie, dass für alle Folgen $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ ein $f \in H(\mathbb{C})$ gibt mit $f(z_n) = w_n$.
Hinweis: Verifizieren Sie die Situation in der Bemerkung im Anschluss an den Satz von Eidelheit für $p_n(f) = \sup\{|f(z)| : |z| \leq |z_n|\}$. Dabei hilft die „polynomiale“ Version des Satzes von Runge für $\Omega = \{z : |z| \leq |z_n| + \varepsilon\} \cup B(z_{n+1}, \varepsilon)$ mit ausreichend kleinem $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 2
Seien $(X, \mathscr{P})$ lokalkonvex und $\mathfrak{B}(X, \mathscr{P})$ das System aller $\mathscr{P}$-beschränkten Teilmengen von X. Für $B \in \mathfrak{B}(X, \mathscr{P})$ und $\varphi \in X'$ sei $p_B = \sup\{|\varphi(x)| : x \in B\}$. Zeigen Sie für $\beta(X', X) = \beta(X', (X, \mathscr{P})) = \{p_B : B \in \mathfrak{B}(X, \mathscr{P})\}$

(a) $(X', \beta(X', X))$ ist ein lokalkonvexer Raum mit $\sigma(X', X) \preccurlyeq \beta(X', X)$,

(b) $\beta(X', X)$ hängt nur von X' ab, d.h falls eine weitere Familie von Halbnormen $\mathscr{Q}$ auf X das selbe Dual erzeugt, also $(X, \mathscr{P})' = (X, \mathscr{Q})'$, so ist $\beta(X', (X, \mathscr{P})) = \beta(X', (X, \mathscr{Q}))$ (deshalb schreibt man $\beta(X', (X, \mathscr{P})) = \beta(X', X)$),

(c) Finden Sie einen lokalkonvexen Raum $(X, \mathscr{P})$, so dass $\beta(X', X)$ echt feiner als $\sigma(X', X)$ ist.

Aufgabe 3

(a) Ist $(X, \mathscr{P})$ halbmetrisierbar, so gibt es für jede $\beta(X', X)$-beschränkte Menge $M \subseteq X'$ ein $U \in \mathfrak{U}_0(X, \mathscr{P})$ mit $M \subseteq U^\circ$.

(b) Ist $(X, \mathscr{P})$ Fréchet, so gibt es für jede $\sigma(X', X)$-beschränkte Menge M ein $U \in \mathfrak{U}_0(X, \mathscr{P})$ mit $M \subseteq U^\circ$.

Hinweis: Zu (a): Für jedes $B \in \mathfrak{B}(X, \mathscr{P})$ gibt es $\varepsilon(B) > 0$ mit $M \subseteq (\varepsilon(B)B)^\circ$. Zeigen Sie, dass $U = \bigcup\limits_{B \in \mathfrak{B}(X, \mathscr{P})} \varepsilon(B)B \in \mathfrak{U}_0(X, \mathscr{P})$, indem Sie für eine monotone Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Halbnormen mit $\mathscr{P} \sim \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ annehmen, dass $\{p_n < 1/n\} \not\subseteq nU$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu (b): Banach-Steinhaus.

Aufgabe 4
Die Menge $\mathcal{S} = \{A \subseteq \mathbb{R} : \forall a \in A\ \exists \alpha \leq \beta \text{ mit } a \in [\alpha, \beta[\ \subseteq A\}$ heißt Sorgenfrey-Topologie auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{S}$ ist tatsächlich eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

(b) Die Standardtopologie $\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{R} : \forall a \in A\ \exists \alpha \leq \beta \text{ mit } a \in\ ]\alpha, \beta[\ \subseteq A\}$ ist echt gröber als $\mathcal{S}$.

(c) Jede stetige Abbildung $F : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{S})$ ist konstant.

(d) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann rechtsseitig stetig (also $f(x) = \lim\limits_{0<h\to 0} f(x+h)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), wenn sie als Abbildung $f : (\mathbb{R}, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ stetig ist.