J. Wengenroth
N. Kenessey, M. Riefer

SS 2012
20.06.2012

Funktionalanalysis
Übungsblatt 8
Abgabe: Mittwoch, 27.06.2012, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Sei $(X, \mathscr{P})$ ein Fréchet-Raum. Zeigen Sie, dass es genau dann eine stetige lineare Surjektion $T : X \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ gibt, wenn X kein Banach-Raum ist.
Hinweis: Zeigen Sie für die eine Implikation, dass mit X auch $T(X)$ ein Banach-Raum sein müsste und $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ kein Banach-Raum ist. Für die andere wende man den Satz von Eidelheit an und zeige dazu die Existenz von Funktionalen $\varphi_n \in \{p'_{n+1} < \infty\} \setminus \{p'_n < \infty\}$.

Aufgabe 2
Sei $A = (a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}} \in]0, \infty[^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ mit $a_{n,k} \leq a_{n+1,k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Der Raum

$$\Lambda(A) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n,k}|x_k| < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$$

versehen mit den Halbnormen $\|x\|_{A,n} = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_{n,k}|x_k|$ ist dann ein Fréchet-Raum.
Bestimmen Sie das Dual $\Lambda(A)'$.
Hinweis: Wieso kann man jedes $\varphi \in \Lambda(A)'$ durch $\varphi(x) = \sum y_k x_k$ mit geeignetem y darstellen? Finden Sie geeignete Wachstumsbedingungen für y.

Aufgabe 3
Sei X ein separabler Banach-Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit

$$\overline{B(0,1)} = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : \ell_1 \to X, (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n$ stetig und offen ist. Dies heißt gerade, dass jeder separable Banach-Raum isomorph zu einem Quotient des ℓ_1 ist.

Aufgabe 4
Sei $J : c_0 \to (\ell'_1, \|\cdot\|'_1)$ definiert durch $J(y)[x] = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$. Zeigen Sie, dass $J(c_0)$ in $(\ell'_1, \|\cdot\|'_1)$ aber nicht in $(\ell'_1, \sigma(\ell'_1, \ell_1))$ abgeschlossen ist. Dies zeigt, dass die Äquivalenz zwischen der Abgeschlossenheit bezüglich $\sigma(X', X)$ und der Abgeschlossenheit bezüglich $(\{p' < \infty\}, p')$ in den Teilen (d) und (e) des closed range theorems im Allgemeinen nur für das Bild einer Transponierten gilt.