J. Wengenroth
N. Kenessey, M. Riefer

SS 2012
13.06.2012

Funktionalanalysis
Übungsblatt 7
Abgabe: Mittwoch, 20.06.2012, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1

(a) Seien (X, d) ein metrischer Raum, (Y, D) ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to Y$ graphenabgeschlossen. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Finden Sie eine unstetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit abgeschlossenem Graphen. Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe 2
Zeigen Sie anhand der zwei folgenden Beispiele, dass der Graphensatz falsch ist, wenn einer der Räume unvollständig ist.

(a) Sei $X = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\} \text{ endlich } \}$ versehen mit der Norm $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ sowie $(Y, \|\cdot\|) = (\ell_1, \|\cdot\|_1)$. Betrachten Sie die Inklusion $I : X \to Y, x \mapsto x$.

(b) Betrachten Sie die Abbildung $i : (\ell_1, \|\cdot\|_1) \to (\ell_1, |||\cdot|||), x \mapsto x$, wobei $|||y||| = \|y\|_1 + |f(y)|$ mit einem unstetigen Funktional $f : \ell_1 \to \mathbb{K}$.

Hinweis: Ein solches Funktional existiert wegen des Zornschen Lemmas.

Aufgabe 3
Sei $F : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung von einem lokalkonvexen Raum $(X, \mathscr{P})$ in einen lokalkonvexen folgenvollständigen Raum $(Y, \mathscr{Q})$, so dass

$$\forall_{p \in \mathscr{P}} \exists_{\tilde{p} \in \mathscr{P}} \text{ mit } \overline{F(B_{\tilde{p}}(0,1))}^{Y} \subseteq F(B_p(0,1)).$$

Zeigen Sie, dass $(X, \mathscr{P})$ ebenfalls folgenvollständig ist.

Aufgabe 4
Für eine offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ betrachten wir

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \Omega \text{ kompakt}\}.$$

Wir nennen eine lineare Abbildung $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ Distribution auf Ω und schreiben $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, falls für alle $K \subseteq \Omega$ kompakt die Einschränkung $u|_{\mathcal{D}(K)}$ stetig ist. Hierbei versehen wir den Raum $\mathcal{D}(K)$ mit der durch

$$\|\varphi\|_n = \sup\{|\partial^\alpha \varphi(x)| : |\alpha| \leq n\}$$

definierten Familie $\{\|\cdot\|_n : n \in \mathbb{N}\}$ von Halbnormen. Dies heisst dann gerade, dass für alle $K \subseteq \Omega$ kompakt Konstanten $n = n(K) \in \mathbb{N}$ und $C = C(K) \geq 0$ existieren, so dass

$$|u(\varphi)| \leq C \sup\{|\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in K, |\alpha| \leq k\}.$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind $u_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ so dass $u_n(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ konvergiert, so definiert $u(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(\varphi)$ eine Distribution auf Ω.

Hinweis: Banach-Steinhaus auf $\mathcal{D}(K)$ anwenden.

(b) Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d, n > 0$ ist durch

$$\varphi_{x_0,n}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-n\|x-x_0\|^2}\right) & : \|x-x_0\|^2 < \frac{1}{n} \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

ein Element von $\mathcal{D}(\Omega)$ definiert.

Hinweis: Schreiben Sie $\varphi_{x_0,n}(x) = \Phi(1 - n\|x - x_0\|^2)$ mit einer geeigneten Funktion $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c) Es gibt keine Folge von Halbnormen $p_n \leq p_{n+1}$ auf $\mathcal{D}(\Omega)$, die den Raum $(\mathcal{D}(\Omega), \{p_n : n \in \mathbb{N}\})$ zu einem Fréchet-Raum macht und so dass alle „Dirac-Distributionen“, also alle Auswertungen $\delta_x : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto \varphi(x)$ mit $x \in \Omega$ bezüglich $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, stetig sind.

Hinweis: Grothendieckscher Faktorisierungssatz.