

Funktionalanalysis
Übungsblatt 6

Abgabe: Mittwoch, 13.06.2012, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1

Seien $(X, \mathcal{P})$, $(Y, \mathcal{Q})$ zwei lokalkonvexe Räume und $T : X \rightarrow Y$ linear und stetig. Die lineare Abbildung

$$T^t : Y' \rightarrow X', \varphi \mapsto \varphi \circ T$$

heißt Transponierte von T . Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (1) Für $A \subseteq X$ gilt $T(A)^\circ = (T^t)^{-1}(A^\circ)$.
- (2) $T(X)$ ist genau dann dicht in Y , wenn T^t injektiv ist.

Hinweis: Bipolarensatz.

- (3) Ist T offen, so gilt $\text{Bild}(T^t) = (\text{Kern } T)^\circ$.

Hinweis: „ $\subseteq$ “ gilt immer. Für die andere Inklusion zeige man für $\varphi \in (\text{Kern}(T))^\circ$, dass $\Phi : Y \rightarrow \mathbb{K}, T(x) \mapsto \varphi(x)$ wohldefiniert und stetig ist.

Aufgabe 2

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banach-Räume und $T_n : X \rightarrow Y$ linear und stetig, so dass für jedes $x \in X$ die Folge $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Falls der Teilraum $\{x \in X : (T_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}$ dicht in X ist zeige man, dass es eine stetige lineare Abbildung $S : X \rightarrow Y$ gibt mit $T_n(x) \rightarrow S(x)$ für alle $x \in X$.

Hinweis: Banach-Steinhaus.

Aufgabe 3

Mit dem Dirichlet-Kern $D_n(y) = \sum_{k=-n}^n e^{iky}$ aus 2.6.c) definieren wir den Fejér-

Kern $F_N(y) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(y)$. Zeigen Sie:

(a) $F_N(y) = \frac{1}{N+1} \left| \sum_{n=0}^N e^{iny} \right|^2,$

(b) $\|F_N\|_1 = 1,$

(c) für alle $\varphi \in L_1[-\pi, \pi]$ gilt $\left\| \varphi - \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n \varphi \right\|_1 \rightarrow 0$, wobei $S_n \varphi = \varphi * D_n$.

Hinweis: Für $f \in L_2[-\pi, \pi]$ folgt $\|f - f * F_N\|_1 \leq \|f - f * F_N\|_2 \rightarrow 0$ aus 2.6.b). Wegen (b) ist $\|f * F_N\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|F_N\|_1$ für jedes $F \in L_1[-\pi, \pi]$ beschränkt und die Aufgabe 2 ist anwendbar.

Aufgabe 4

- (1) Zeigen Sie $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$ für alle $f \in L_1[-\pi, \pi]$.

Hinweis: A2. Für $f \in L_2$ folgt die Konvergenz aus $\sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2$.

- (2) Für $c_0(\mathbb{Z}) = \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \lim_{|n| \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}$ versehen mit der Supremumsnorm folgt also, dass $T : L_1[-\pi, \pi] \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), f \mapsto \hat{f} = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ eine wohldefinierte stetige lineare Abbildung ist. Zeigen Sie, dass $\hat{\cdot}$ injektiv ist.

Hinweis: Aufgabe 3 (c)

- (3) Die Menge $\left\{ x \in c_0(\mathbb{Z}) : \exists f \in L_1[-\pi, \pi] \text{ mit } x = \hat{f} \right\}$ ist von erster Kategorie in $c_0(\mathbb{Z})$.

Hinweis: Wegen des Open mapping theorems und (2) wären sonst $L_1[-\pi, \pi]$ und $c_0(\mathbb{Z})$ isomorph, also auch ihre Dualräume. Damit wäre L'_1 separabel, würde aber auch einen zu $\ell_\infty(\mathbb{N})$ -isometrisch isomorphen Teilraum enthalten. Für die Existenz eines solchen Teilraums betrachten Sie für $z \in \ell_\infty(\mathbb{N})$

die Abbildung $\varphi_z : L_1[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{K}, f \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} z_n \int_{\left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]} f d\lambda$.