Funktionalanalysis
Übungsblatt 5

Abgabe: Mittwoch, 06.06.2012, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1

Zeigen Sie für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ mit Dualraum $X' = (X, \|\cdot\|)'$ folgende Aussagen

- (a) $\sigma(X, X') \preccurlyeq \|\cdot\|$,
- (b) $\|\cdot\| \preccurlyeq \sigma(X, X') \Leftrightarrow \dim(X) < \infty$.

Hinweis zum Teil (b), $\Rightarrow$: Zeigen Sie zunächst $\dim(X') < \infty$ mit 1.16.(e).

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ genau dann vollständig ist, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert (das heißt natürlich es gibt ein $s_{\infty} \in X$ mit $\|\sum_{k=1}^n x_k - s_{\infty}\| \rightarrow 0$).

Hinweis: 2.1.(b)

Aufgabe 3

- (a) Zeigen Sie, dass jeder Banach-Raum mit einer abzählbaren (Hamel-)Basis (also einer Menge M , so dass jedes Element als **endliche** Linearkombination aus M dargestellt werden kann) endlichdimensional ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $\ell_1 = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ von erster Kategorie in $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ ist (wobei $\|x\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$).

Hinweis: Zeigen Sie, dass $B_{\ell_1}(0, R)$ in ℓ_2 abgeschlossen ist.

Aufgabe 4

Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ verstehen wir das Dual X' mit der Dualnorm $\|\varphi\|' = \sup\{|\varphi(x)| : \|x\| \leq 1\}$ und setzen $X'' = (X', \|\cdot\|)'$. Zeigen Sie, dass $\sigma(X', X'') = \sigma(X', X)$ genau dann gilt, wenn zu jedem $\Psi \in X''$ ein $x \in X$ existiert mit $\Psi(\varphi) = \varphi(x)$ für alle $\varphi \in X'$ (solche Räume nennt man reflexiv).

Bonusaufgabe

Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $C(f) = \mathbb{Q}$, wobei $C(f) = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ stetig in } x\}$.

Hinweis: Für $\varepsilon > 0$ definiere man

$$C(f, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 \forall y, z \in B(x, \delta) |f(y) - f(z)| < \varepsilon\}.$$

Man zeige anschließend, dass $C(f, \varepsilon)$ offen ist und $C(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C(f, \frac{1}{n})$ und folgere mit dem Satz von Baire, dass $C(f) \neq \mathbb{Q}$.