J. Wengenroth
N. Kenessey, M. Riefer

SS 2012
16.05.2012

Funktionalanalysis
Übungsblatt 4
Abgabe: Mittwoch, 23.05.2012, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Seien $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \cup \{(0,0)\}$, p_B das zugehörige Minkowski-Funktional, $L = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ und $f : L \to \mathbb{R}, (x,0) \mapsto x$. Zeigen Sie $f \leq p_B$ auf L und, dass es keine lineare p_B-dominierte Fortsetzung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von f gibt. Ist dies ein Widerspruch zum Satz von Hahn-Banach?

Aufgabe 2
Seien $(X, \mathfrak{P})$ ein lokalkonvexer Raum, $B \subseteq X$ konvex und $x \in X$. Folgern Sie aus dem Trennungssatz, dass $x \in \overline{B}$ genau dann gilt, wenn $\Re\varphi(x) \leq t$ für alle $\varphi \in (X, \mathfrak{P})'$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $\sup\{\Re\varphi(b) : b \in B\} \leq t$.

Aufgabe 3
Seien $C[0,1]$ der Raum der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ und $B \subseteq C[0,1]$ konvex und beschränkt, d.h. $\sup\{\|g\|_\infty : g \in B\} < \infty$. Weiter sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, so dass es eine Folge in B gibt, die punktweise gegen f konvergiert. Zeigen Sie, dass es eine Folge in B gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert.
Hinweis: Aufgabe 2, Rieszscher Darstellungssatz und Lebesgues Satz über die dominierte Konvergenz.
Herausforderung: Für einen elementaren Beweis dieser Aussage (der keine Ergebnisse unserer Vorlesung benutzt) gibt es 50 Sonderpunkte und eine Flasche Champagner.

Aufgabe 4
Seien X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, T ein kompakter metrischer Raum und $\varphi, \varphi_t : X \to \mathbb{K}$ linear für $t \in T$, so dass

(1) die Abbildung $t \mapsto \varphi_t(x)$ ist für alle $x \in X$ stetig,

(2) $|\varphi(x)| \leq \sup\{|\varphi_t(x)| : t \in T\}$ für alle $x \in X$.

Zeigen Sie, dass es ein Maß μ auf T und eine messbare Funktion $h : T \to \mathbb{K}$ mit $|h| \leq 1$ gibt, so dass für alle $x \in X$

$$\varphi(x) = \int_T \varphi_t(x) h(t) d\mu(t).$$

Hinweis: Zeigen Sie für $\Phi : X \to C(T), x \mapsto (\varphi_t(x))_{t \in T}$, dass die Abbildung $f : \mathrm{Bild}(\Phi) \to \mathbb{K}, \Phi(x) \mapsto \varphi(x)$ wohldefiniert, linear und stetig ist und stellen Sie eine (wegen des Satzes von Hahn-Banach existierende) lineare stetige Fortsetzung mit dem Rieszschen Satz dar.