J. Wengenroth
N. Kenessey, M. Riefer

SS 2012
25.04.2012

Funktionalanalysis
Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 16.05.2012, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und X' sein Dualraum versehen mit der (gemäß Blatt 1, A3 vollständigen) sogenannten Dualnorm

$$\|\varphi\|' = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Für ein $x \in X$ sei $\delta_x : X' \to \mathbb{K}, \varphi \mapsto \varphi(x)$ die Auswertung in x. Zeigen Sie, dass

$$\delta : X \to (X', \|\cdot\|')', x \mapsto \delta_x$$

eine lineare Isometrie ist, d.h $\|x\| = \|\delta_x\|''$. Dies zeigt, dass jeder normierte Raum isometrisch isomorph zu einem Teilraum eines Banach-Raums ist.

Aufgabe 2
Seien$(X, \mathcal{P})$ ein lokalkonvexer Raum, $L \subseteq X$ ein Teilraum und X/L der Raum aller Äquivalenzklassen $[x]$ bezüglich der Relation $x \sim y$, falls $x - y \in L$. Vermöge $\alpha[x] + \beta[y] = [\alpha x + \beta y]$ ist dies ein Vektorraum und die Quotientenabbildung $\pi : X \to X/L, x \mapsto [x]$ ist linear.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $p \in \mathcal{P}$ durch

$$\tilde{p}([x]) = \inf\{p(y) : x \sim y\}$$

eine Halbnorm auf X/L definiert ist. (Der lokalkonvexe Raum $(X/L, \mathcal{P}/L)$ mit $\mathcal{P}/L = \{\tilde{p} : p \in \mathcal{P}\}$ heißt dann lokalkonvexer Quotient von X nach L.)

(b) Zeigen Sie, dass L genau dann abgeschlossen ist, wenn $(X/L, \mathcal{P}/L)$ separiert ist, d.h. das Nullelement $[0]$ ist das einzige, dass von allen Halbnormen aus $\mathcal{P}/L$ annuliert wird.

Aufgabe 3
Seien Ω ein metrischer Raum, $A \subseteq \Omega$ abgeschlossen und $CB(\Omega)$ bzw. $CB(A)$ die Räume der stetigen beschränkten Funktionen auf Ω bzw. A mit Werten in $\mathbb{R}$. Wir versehen diese Räume mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\Omega$ bzw. $\|\cdot\|_A$. Zeigen Sie für $L = \{f \in CB(\Omega) : f|_A = 0\}$, dass durch $\Phi : CB(\Omega)/L \to CB(A), [g] \mapsto g|_A$ eine Isometrie wohldefiniert ist, wobei der Quotientenraum mit der Quotientennorm aus A2 versehen ist.
Hinweis: Satz von Tietze-Urysohn.

Aufgabe 4
Es sei $H(\mathbb{C})$ der Raum der ganzen (also auf $\mathbb{C}$ holomorphen) Funktionen versehen mit den Halbnormen $p_n(f) = \sup\{|f(z)| : |z| \leq n\}$. Für $\mathcal{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist der Raum $(H(\mathbb{C}), \mathcal{P})$ lokalkonvex und wir definieren für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$e_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(\lambda z).$$

Zeigen Sie für jede Menge $\Lambda \in \mathbb{C}$ mit inneren Punkten, dass die lineare Hülle $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ dicht in $H(\mathbb{C})$ ist.
Hinweis: Für $\varphi \in H(\mathbb{C})'$, das die lineare Hülle annulliert, definiere man $g(\lambda) = \varphi(e_\lambda)$ und rechne nach, dass $g \in H(\mathbb{C})$ gilt (so, dass der Eindeutigkeitssatz $g = 0$ liefern kann) mit $g^{(n)}(\lambda) = \varphi(z \mapsto z^n e^{\lambda z})$. Man berechne $\varphi(z \mapsto z^n)$.

Aufgabe 5[Bonusaufgabe]

(a) Auf jeder Menge gibt es eine Wohlordnung.

(b) Sind X, Y wohlgeordnet, so gilt $X \preccurlyeq Y$ oder $Y \preccurlyeq X$, wobei $X \preccurlyeq Y$ bedeutet, dass es einen Anfang B von Y und eine bijektive Abbildung $f : X \to B$ gibt mit $f(x) < f(y) \Leftrightarrow x < y$.

(c) Falls $X \preccurlyeq Y$, so ist die Abbildung f aus (b) eindeutig.

Hinweis: Für (a) wende man das Zornsche Lemma auf $\mathscr{M} = \{(A, \leq_A) : A \subseteq X, \leq_A \text{ Wohlordnung}\}$ versehen mit der Halbordnung $(A, \leq_A) \preccurlyeq (B, \leq_B)$, falls A ein Anfang von B ist und für alle $x, y \in A$ gilt $x \leq_A \Leftrightarrow x \leq_B y$.