J. Wengenroth
N. Kenessey, M. Riefer

SS 2012
18.04.2012

Funktionalanalysis
Übungsblatt 1
Abgabe: Mittwoch, 25.04.2012, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Seien M eine Menge, $A \subseteq M$ und $X = \{f : M \to \mathbb{K} : f(A) \text{ beschränkt}\}$.
Zeigen Sie, dass die Halbnorm $\|f\|_A = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$ vollständig ist.

Aufgabe 2
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume so ist $X \times Y$ versehen mit $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ ebenfalls ein Banach-Raum.

(b) Wir versehen $\prod_{j=0}^{k} C([0,1])$ mit der Norm $\|(g_0, ..., g_n)\| = \sum_{j=0}^{k} \|g_j\|_{[0,1]}$, wobei $\|g\|_{[0,1]} = \sup\{|g(x)| : x \in [0,1]\}$. Für die Menge $C^k([0,1])$ der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen und

$$T : C^k([0,1]) \to \prod_{j=0}^{k} C([0,1]), \qquad f \mapsto (f, f', ..., f^{(k)})$$

ist $\mathrm{Bild}(T) = \{T(f) : f \in C^k([0,1])\}$ abgeschlossen in $\prod_{j=0}^{k} C([0,1])$.

(c) Die Menge $C^k([0,1])$ versehen mit der Norm $\|f\|_{[0,1],k} = \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_{[0,1]}$ ist ein Banach-Raum.

Hinweis: Zeigen Sie für (ii) mit Hilfe des HDI, dass ein Element $(g_0, ..., g_k)$ des Abschlusses die Identität $g_j(x) = g_j(0) + \int_0^x g_{j+1}(t)dt$ erfüllt.

Aufgabe 3
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ halbnormiert und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normiert sowie

$$L(X,Y) = \{T : X \to Y \text{ linear und stetig }\}.$$

Zeigen Sie, dass $|||T||| = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$ eine Norm auf $L(X,Y)$ definiert, so dass $\|T(x)\|_Y \leq |||T||| \cdot \|x\|_X$ für alle $x \in X$. Beweisen Sie außerdem, dass $|||\cdot|||$ vollständig ist, falls $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 4
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ halbnormiert **und vollständig** und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normiert sowie $S \in L(X,Y)$ offen, das heißt es gibt ein $C > 0$, so dass für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $S(x) = y$ und $\|x\|_X \leq C\|y\|_Y$. Zeigen Sie, dass für alle $R \in L(X,Y)$ mit $|||R||| < \frac{1}{C}$ die Abbildung $T = S + R$ wieder offen ist.
Hinweis: Satz 1.3. Dies zeigt, dass die Menge der offenen Operatoren in $L(X,Y)$ offen ist.

Aufgabe 5
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum und $T \in L(X, X)$ mit $|||T||| < 1$. Geben Sie zwei verschiedene Beweise dafür, dass $Id - T$ invertierbar in $L(X, X)$ ist, also eine stetige lineare Umkehrfunktion besitzt.
Hinweis: Eine Möglichkeit bietet die Aufgabe 4, eine andere die Untersuchung der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ in $L(X, X)$.