- Kapitel 8: Integration
- Informationen zur Vorlesung: http://www.mathematik.uni-trier.de/~wengenroth/

# 8.1 Motivation

- Ist die Differentiation umkehrbar?
  - Für jeden Zeitpunkt $x \in [0, \infty)$ sei die Geschwindigkeit $f'(x)$ bekannt.
  - Außerdem sei der Startpunkt $f(0)$ bekannt.
  - Kann man dann $f$ bestimmen?
- Physikalische Gesetze beschreiben Beschleunigungen
  - Fallgesetz $f''(x) = -c$ (Erdbeschleunigung 9.81 $m/s^2$).
  - Gegeben außerdem $f(0)$ und $f'(0)$.
  - Wie bestimmt man $f$?
- Flächeninhalte: Was ist das und wie berechnet man die?

# 8.2 Riemann-Summen

(a) Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ will man den vom Funktionsgraphen $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} : x \in [a, b] \right\}$ und der $x$-Achse $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in [a, b] \right\}$ eingeschlossenen Flächeninhalt definieren und berechnen.

(b) Idee: Zerlege das Intervall $[a, b]$ in kleine Teilintervalle $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$ und approximiere auf jedem Teilintervall die Funktion $f$ durch eine dort konstante Funktion mit Funktionswert $f(z_k)$ für ein $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Dann sollte $\sum\limits_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1})$ eine Näherung für den Flächeninhalt sein.

(c) Eine endliche Teilmenge $\mathcal{P}$ von $[a, b]$ mit $a, b \in \mathcal{P}$ heißt eine Partition des Intervalls. Wir schreiben stets $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. Die Zahl $\|\mathcal{P}\| = \max\{x_k - x_{k-1} : k \in \{1, \cdots, n\}\}$ heißt Feinheit der Partition $\mathcal{P}$.

# 8.2 Riemann-Summen

(d) Für eine Partition $\mathcal{P} = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ heißt ein Vektor $z = [z_1, \ldots, z_n] \in \mathbb{R}^n$ zulässig, falls $x_{k-1} \leq z_k \leq x_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, das heißt die $k$-te Komponente liegt im $k$-ten Teilintervall.
Wir schreiben dann $z \sqsubseteq \mathcal{P}$.

(e) Für eine Partition $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}, z \sqsubseteq \mathcal{P}$ und eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt

$$R(f, \mathcal{P}, z) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1})$$

die zugehörige Riemann-Summe.

(f) Die Summanden $f(z_k)(x_k - x_{k-1})$ sind die Flächeninhalte der Rechtecke mit Seitenlängen $x_k - x_{k-1}$ und Höhe $f(z_k)$.

(g) Selbst für einfache Funktionen sind die Riemann-Summen oft nicht leicht auszurechnen.

# 8.3 Das Integral

(a) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar auf $[a, b]$ mit Integral $I$, falls die Riemann-Summen $R(f, \mathcal{P}, z)$ für $\|\mathcal{P}\| \to 0$ gegen $I$ konvergieren, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \sqsubseteq \mathcal{P} \quad (\|\mathcal{P}\| < \delta \Longrightarrow |R(f, \mathcal{P}, z) - I| < \varepsilon).$$

(b) Schreibweisen für das Integral $I$ sind

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \cdots = \int_a^b f(\heartsuit)d\heartsuit$$

Hierbei kann die Integrationsvariable irgendein Symbol sein, das im Kontext noch nicht benutzt wird.

(c) Diese Defintion des Integrals ist

- gut für die Theorie (klarer Begriff, nützliche Sätze)
- katastrophal zum Ausrechnen!

# 8.3 Das Integral

(d) **Beispiel.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto c$ eine konstante Funktion, also $f(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist $\int\limits_a^b f(x)dx = c(b - a)$.

Für $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} R(f, \mathcal{P}, c) &= \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^{n} x_k - x_{k-1} \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(-x_0 + x_n) = c(x_n - x_0) = c(b - a). \end{aligned}$$

Selbst für dieses banale Beispiel braucht man also einen Trick (Teleskopsumme).

# 8.4 Satz

(a) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

(b) Sind $f$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beide integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \text{ Linearität}$$

(c) Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beide integrierbar mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ Monotonie.

(d) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist auch $|f|$ integrierbar und $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$. $\Delta$-Ungleichung

# 8.4 Satz

(e) Sind $f \in [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $c \in [a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \text{ Intervallteilung}$$

**Beispiel.** $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Wegen 8.4 (a) ist $f(x) = x^2$ auf $[0,1]$ integrierbar. Deshalb reicht es den Grenzwert spezieller Riemann-Summen auszurechnen. Für $\mathcal{P}_n = \{0 = 0/n < 1/n < \ldots < n/n = 1\}$ und $z = [1/n, \ldots, n/n]$ gilt

$$R(f, \mathcal{P}_n, z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \left( \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \longrightarrow \frac{1}{3}.$$

Wir werden dieses Integral gleich viel einfacher ausrechnen können.

# 8.5 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig

(a) Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von $f$, das heißt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

(b) Ist $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ irgendeine Stammfunktion von $f$, so gilt

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) \text{ für alle } a \leq \alpha < \beta \leq b.$$

Bemerkung:

(a) Für $G(\beta) - G(\alpha)$ schreibt man auch $G\Big|_{\alpha}^{\beta}$ oder $G(t)\Big|_{t=\alpha}^{\beta}$.

(b) Für $\beta < \alpha$ definieren wir $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = -\int\limits_{\beta}^{\alpha} f(t)dt$. Dann gilt

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G\Big|_{\alpha}^{\beta} \text{ für alle } \alpha, \beta \in [a, b] \text{ (auch wenn } \beta < \alpha).$$

(c) Die Ableitung von $G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ist $f(x) = x^n$. Also gilt $\int\limits_{0}^{1} x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{1}{n+1}$.

## Beweis des HDI.

(a) Für $y < x$ mit $|x-y|$ klein genug gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(y)}{x-y} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{x-y}\left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt\right) - f(x)\right| \\ &= \left|\frac{1}{x-y}\int_y^x f(t)dt - \frac{1}{x-y}\int_y^x f({\color{red}x})dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|x-y|}\int_y^x |f(t)-f(x)|dt \leq \frac{1}{|x-y|}\int_y^x \varepsilon dt = \varepsilon.\end{aligned}$$

Durch Rollentausch erhält man dieselbe Ungleichung, falls $x < y$.

(b) Sei $F$ die Funktion aus (a). Für $H = G - F$ gilt dann $H' = G' - F' = f - f = 0$, und wegen des Mittelwertsatzes ist $H$ konstant $= H(a)$.
Für $\alpha < \beta$ folgt aus der Definition von $F$ mit Intervallteilung

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_a^\beta f(t)dt - \int_a^\alpha f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

Andererseits gilt

$$G(\beta) - G(\alpha) = F(\beta) + H(a) - (F(\alpha) + H(a)) = F(\beta) - F(\alpha).$$

□

# 8.6 Beispiele

(a) $\int\limits_a^b \sin(x)dx = -\cos\Big|_a^b$

(b) $\int\limits_a^b \cos(x)dx = \sin\Big|_a^b$

(c) $\int\limits_a^b e^x dx = e^b - e^a$

(d) $\int\limits_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan\Big|_a^b$

(e) $\int\limits_a^b \log(x)dx = (x\log(x) - x)\Big|_{x=a}^b$ für $0 < a < b$ ($\log = \ln$).

In allen Beispielen hat man die Stammfunktion entweder gewusst oder geraten.

# 8.7 Satz (Partielle Integration)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Beweis. Wegen des HDI gilt

$$fg\Big|_a^b = \int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x) + f'(x)g'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

□

# Beispiele.

(a) $\int\limits_a^b x \sin(x) dx = ?$

$$f(x) = -\cos(x), g(x) = x$$
$$\Rightarrow ? = \int\limits_a^b f'(x) g(x) dx = -x\cos(x)\Big|_{x=a}^{b} + \int\limits_a^b \cos(x) dx = (-x\cos(x) + \sin(x))\Big|_{x=a}^{b}$$

Wir haben hier nicht bloß das bestimmte Integral ausgerechnet, sondern sogar eine Stammfunktion $-x\cos(x) + \sin(x)$. Durch Differentiation kann man im Nachhinein verifizieren, dass es sich tatsächlich um eine Stammfunktion handelt.

(b) $\int\limits_a^b \log(x)dx =?$ Wir setzen $f(x) = x$, $g(x) = \log(x)$ und erhalten

$$\int\limits_a^b \log(x)dx = \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx = x\log(x)\Big|_{x=a}^b - \int\limits_a^b x\frac{1}{x}dx = (x\log(x) - x)\Big|_a^b$$

(c) $\int\limits_a^b x^2\cos(x)dx = x^2\sin(x)\Big|_{x=a}^b - \int\limits_a^b 2x\sin(x)dx.$
Nochmalige partielle Integration (oder Anwenden von (a)) liefert

$$\int\limits_a^b x^2\cos(x)dx = (x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x))\Big|_{x=a}^b.$$

# 8.8 Satz (Substitutionsregel)

Seien $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : \varphi([\alpha, \beta]) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**Bemerkung.**

(a) Merkregel $x$ zwischen $\varphi(\alpha)$ und $\varphi(\beta), x = \varphi(t) \Longrightarrow t$ zwischen $\alpha$ und $\beta$ und $dx = \varphi'(t)dt$

(b) Erster Anwendungstyp: Integrand ist von der Form $f(\varphi(x))\varphi'(t)$.
Beispiel: $\int\limits_a^b t\sin(t^2)dt = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \varphi'(t)\sin(\varphi(t))dt$ für $\varphi(t) = t^2$. Also

$$\int\limits_a^b t\sin(t^2)dt = \frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{b^2} \sin(x)dx = \frac{1}{2}(\cos(a^2) - \cos(b^2))$$

# 8.8 Substitutionsregel

(c) Zweiter Anwendungstyp

- Gesucht $\int\limits_a^b f(x)dx$
- Suche $\varphi$, so dass $f(\varphi(t))$ einfach
- Suche $\alpha, \beta$ mit $a = \varphi(\alpha)$ und $b = \varphi(\beta)$

Beispiel: Gesucht ist $\int\limits_a^b e^{\sqrt{x}}dx$ für $0 \leq a < b$.

- $x = \varphi(t)$ mit $\varphi(t) = t^2$
- $\alpha = \sqrt{a}, \beta = \sqrt{b}$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b e^{\sqrt{x}}dx = \int\limits_{\varphi(\sqrt{a})}^{\varphi(\sqrt{b})} e^{\sqrt{x}}dx = \int\limits_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^t 2tdt$$

Weiter mit partieller Integration

$$\int\limits_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^t tdt = e^t t\Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} - \int\limits_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^t dt = (e^t t - e^t)\Big|_{t=\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}$$

# 8.8 Substitutionsregel

Auch hier hat man eine Stammfunktion berechnet, nämlich $F(x) = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}$, was man durch Probe leicht verifiziert.

Beweis der Substitutionsregel. Sei $F$ eine Stammfunktion von $f$ (die existiert wegen des HDI). Dann gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = (F \circ \varphi)\Big|_{\alpha}^{\beta} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(t)dt \\ &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \end{aligned}$$

# 8.9 Satz (Stammfunktion der Umkehrfunktion)

Sei $f : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar und bijektiv. Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, so hat $f^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ die Stammfunktion

$$G(y) = yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$

**Beweis.** Für $y \in [\alpha, \beta]$ sei $x \in [a, b]$ mit $y = f(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\int_\alpha^y f^{-1}(z)dz = \int_\alpha^{f(x)} f^{-1}(z)dz = \int_a^x f^{-1}(f(t))f'(t)dx \\ &= \int_a^x tf'(t)dt = tf(t)\Big|_{t=a}^x - \int_a^x f(t)dt \\ &= xf(x) - F(x) - c = f^{-1}(y)y - F(f^{-1}(y)) - c. \end{aligned}$$

wobei $c = af(a) - F(a)$ nicht von $y$ abhängt und beim Ableiten 0 ergibt. $\square$

# 8.9 Satz (Stammfunktion der Umkehrfunktion)

**Beispiel.** $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ ist bijektiv. Die Umkehrabbildung $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ heißt Arcussinus. Eine Stammfunktion von $\sin(x)$ ist

$$-\cos(x) = -\sqrt{\cos^2(x)} = -\sqrt{1 - \sin^2(x)}.$$

Eine Stammfunktion von arcsin ist also

$$G(y) = y \arcsin(y) + \sqrt{1 - y^2}$$

# 8.10 Flächeninhalt des Halbkreises

Sei $r > 0$ und $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$. Dann ist $\int\limits_{-r}^{r} f(x)dx$ der Flächeninhalt des Halbkreises $H_r = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0 \right\}$ mit Radius $r$.

- Substitution $x = rt : dx = rdt$,
  $\Rightarrow \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - (rt)^2}rdt = r^2 \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}dt$
- Substitution $t = \sin(u) : dt = \cos(u)du, \pm 1 = \sin(\pm\pi/2)$
  $\Rightarrow I = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}dt = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(u)}\cos(u)du = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)du$
- Mit partieller Integration folgt

$$I = \sin(u)\cos(u)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(u)du = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - \cos^2(u)du$$
$$= \pi - I \Rightarrow \boxed{I = \pi/2}$$

# 8.10 Flächeninhalt des Halbkreises

Der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius $r$ ist $\pi r^2$.

Bemerkung. Wir haben übrigens (mit $y$ statt $\pi/2$) eine Stammfunktion von $\cos^2(u)$ gefunden, nämlich $\frac{1}{2}(\sin(u)\cos(u) + u)$.