- Kapitel 4: Stetigkeit
- Informationen zur Vorlesung:
  http://www.mathematik.uni-trier.de/~wengenroth/

4. Stetigkeit

Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, die zum Beispiel die Produktionsmengen von m Gütern in Abhängigkeit der Mengen von n eingesetzten Rohstoffen beschreibt, so ist wichtig zu wissen, ob kleine Änderungen bei den Rohstoffmengen $x_1, \ldots, x_n$ auch nur zu kleinen Änderungen der produzierten Mengen der m Güter führen.
Für die Behandlung dieser Frage muss man insbesondere präzisieren, was „kleine Änderungen“ sind.

4.1 Erinnerung

(a) Mit $\|x\|_n = \sqrt{x_1^2 + \ldots, x_n^2}$ bezeichnen wir die euklidische Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt dann $d_n(x, y) = \|x - y\|_n$ (euklidischer) Abstand zwischen x und y.

(c) Diese Definition des Abstands ist durch die Geometrie des $\mathbb{R}^2$ motiviert (und in der analytischen Geometrie sehr nützlich). Bei der Interpretation von $x_1, \ldots, x_n$ als Rohstoffmengen ist es oft naheliegender zu sagen, $x = [x_1, \ldots, x_n]$ sei nah bei $y = [y_1, \ldots, y_n]$, falls x_k nah bei y_k ist für jedes k, d.h. falls $\|x - y\| = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$ klein ist. In Ü 10 haben wir für diesen „Maximalabstand“ gezeigt

$$\|x - y\|_\infty \leq d_n(x, y) \leq \sqrt{n}\|x - y\|_\infty.$$

(d) Wenn man lediglich den Begriff „kleine Änderungen“ definieren will, ist es ziemlich egal, mit welchem Abstandbegriff man operiert. Mit dem euklidischen lassen sich manche Sachen etwas leichter beweisen.

4.2 Definition der Stetigkeit

(a) Beschreibt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wieder die Produktion von m Gütern, so lässt die Qualitätskontrolle gewissen Toleranzen bei den Produktionsmengen zu. Hat nämlich ein Kunde $z_1 = 100$ kg vom ersten und $z_2 = 350$ kg vom zweiten Produkt bestellt, so wird er sich wohl nicht beschweren, wenn er 99.99 kg vom ersten und 350.02 kg vom zweiten geliefert bekommt.
Ist nun ein Input $x = [x_1, \ldots, x_n]$ theoretisch bekannt mit $f(x) = [z_1, z_2]$, so fragt sich der Produktionsleiter:

- Um wieviel darf ich von diesen exakten Mengen abweichen, damit der Output innerhalb der Fehlertoleranz bleibt?
- Geht das überhaupt?

Mathematiker haben die Angewohnheit, die Fehlertoleranz bei der Produktion ε (epsilon) und die erlaubte Abweichung δ (delta) zu nennen.

4.2 Definition der Stetigkeit

(b) Definition: Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion sowie $x \in A$. Die Funktion f heißt stetig in x, falls es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $y \in A$ gilt

$$d_n(x, y) < \delta \Longrightarrow d_m(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

(c) Beachte die Logik dieser Definition: Zu jeder Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ gibt es eine Präzisionstoleranz $\delta > 0$, so dass jede Abweichung $d_n(x, y)$ von x um höchstens δ zu einem Fehler $d_m(f(x), f(y))$ kleiner als ε führt.

(d) Um diese logische Struktur der Definition kurz auszudrücken, benutzt man die Quantoren

$\forall$ für alle (oder für jede) sowie $\exists$ es gibt (oder existiert).

Mit diesen Abkürzungen heißt die Stetigkeit in $x \in A$ also

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y \in A \left(d_n(x, y) < \delta \Longrightarrow d_m(f(x), f(y)) < \varepsilon \right)$$

4.2 Definition der Stetigkeit

(e) Die Funktion $f : A \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig auf A, falls sie in jedem Punkt $x \in A$ stetig ist. Ist A durch den Kontext klar, nennt man f auch einfach stetig.

4.3 Beispiele

(a) Jede lineare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist auf $\mathbb{R}^n$ stetig. Beweis: Für die Matrix $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit den Spalten $f(e^1), \ldots, f(e^n)$ gilt $f(x) = P \cdot x$ und wegen der Übungsaufgabe 15 gilt $\|P \cdot x\|_m \leq N(P)\|x\|_n$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit einer gewissen Zahl $N(P) \geq 0$. Seien nun $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ (eine Fehlertoleranz). Wir definieren $\delta = \varepsilon / N(P)$ (falls $N(P) > 0$ und $\delta = 1$ sonst). Für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ mit $d_n(x, y) < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} d_m(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\|_m = \|f(x-y)\|_m = \|P \cdot (x-y)\|_m \leq N(P)\|x-y\|_n \\ &= N(P) d_n(x,y) < N(P)\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = x_0 \\ 0, & \text{falls } x \neq x_0 \end{cases}$. Dann ist f stetig in jedem $x \neq x_0$ und unstetig in x_0.

- $x \neq x_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta = d_n(x, x_0)$. Für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ mit $d_n(x, y) < \delta$ ist dann $y \neq x_0$ und daher gilt $d_m(f(x), f(y)) = d_m(0, 0) = 0$.
- Die Unstetigkeit in x_0 bedeutet: Es gibt Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$, so dass es zu jeder Präzisionstoleranz $\delta > 0$ einen Input $y \in \mathbb{R}^n$ gibt, der zwar $d_n(x_0, y) < \delta$ erfüllt, aber $d_m(f(x_0), f(y)) \geq \varepsilon$, in Kurzschreibweise

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, y \in \mathbb{R}^m \ \text{ mit } d_n(x_0, y) < \delta \text{ und } d_m(f(x_0), f(y)) \geq \varepsilon.$$

4.3 Beispiele

Wir zeigen dies für $\varepsilon = 1$: Für beliebiges $\delta > 0$ betrachten wir dazu $y = x_0 + \frac{\delta}{2} e^1$ mit dem ersten Einheitsfaktor. Dann gilt $d_n(x_0, y) = \|x_0 - y\|_n = \frac{\delta}{2} < \delta$ und

$$d_1(f(x_0), f(y)) = d_1(1, 0) = |1 - 0| = 1 \geq \varepsilon.$$

Bemerkung: Schon an diesen einfachen Beispielen sieht man, dass der Nachweis der Stetigkeit anhand der Definition ziemlich unangenehm sein kann (woher kommt das δ?) Deshalb braucht man hinreichende Bedingungen.

4.4 Satz

(a) Eine Funktion $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $x \in A$, wenn alle Komponentenfunktionen stetig sind.

(b) Linearkombinationen stetiger Funktionen sind stetig.

(c) Kompositionen stetiger Funktionen sind stetig. Genauer $f : A \longrightarrow B$ stetig in $x \in A$ und $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^q$ stetig in $f(x) \Longrightarrow g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ist stetig in x.

(d) Sind $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^1$ und $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ beide stetig in x, so ist auch $fg : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig in x.

4.4 Satz

Die Beweise von (a), (b) und (d) sind „rechentechnisch“ nicht ganz leicht aber wenig erhellend. Der Beweis von (c) ist konzeptionell interessanter: Sei $\varepsilon > 0$ eine Toleranz. Wegen der Stetigkeit von g in $f(x)$ gibt es $\delta > 0$, so dass jeder „Zwischeninput“ $z \in B$ mit $d_m(f(x), z) < \delta$ zu einem Ergebnis $g(z)$ mit $d_q(g(f(x)), g(z)) < \varepsilon$ führt. Wir fassen jetzt δ als Fehlertoleranz für f auf. Dann gibt es eine Inputtoleranz (die wir irgendwie benennen wollen, leider ist der Name δ schon verbraucht und wir nennen sie deshalb) $\eta > 0$, so dass
$d_n(x, y) < \eta \Longrightarrow d_m(f(x), f(y)) < \delta$.
Für jedes $y \in A$ mit $d_n(x, y) < \eta$ folgt dann (mit $z = f(y)$)

$$d_q(g \circ f(x), g \circ f(y)) = d_q(g(f(x)), g(z)) < \varepsilon.$$

$\square$

4.5 Beispiel

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$. Beweis:

(1) $a : [x, y] \mapsto x$ ist stetig (z.B. weil linear)

(2) $b : [x, y] \mapsto x^2$ ist stetig

(3) $c : [x, y] \mapsto y^2$ ist stetig mit den gleichen Argumenten

(4) $d : [x, y] \mapsto x^2 + y^2$ ist stetig als Summe

(5) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig (EAI)

(6) $f = \sin \circ d$ ist stetig als Komposition.

4.6 Bemerkung

Stetigkeit ist eine wichtige qualitative Eigenschaft von Funktionen, die allerdings nicht leicht quantifizierbar ist (insbesondere: welche Input-Toleranz bei gegebener Fehlertoleranz?). Für die quantitativen Aspekte benötigt man genauere Untersuchungen, wie sich die Outputabweichungen $f(x) - f(y)$ in Abhängigkeit von den Inputabweichungen $x - y$ verhalten.