Elemente der Analysis II

- Kapitel 2: Abbildungen mehrerer Variablen
- Informationen zur Vorlesung:
  http://www.mathematik.uni-trier.de/∼wengenroth/

2.1 Bemerkungen

(a) Wie in 1.3 der EA I ist eine Abbildung $f : A \to B$ eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ ein eindeutig bestimmtes Element $f(x) \in B$ zuordnet. Man schreibt dann $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$.

(b) In diesem Teil der Vorlesung sind stets $A = \mathbb{R}^n$ oder $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B = \mathbb{R}$ oder $B = \mathbb{R}^m$.

(c) Für $A = B = \mathbb{R}$ kann man die Abbildung oder Funktion durch ihren Graphen $\Gamma_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ veranschaulichen. Für vernünftiges f ist also Γ_f eine Kurve im $\mathbb{R}^2$.

(d) Für $A = \mathbb{R}^2$ und $B = \mathbb{R}$ ist der Graph

$$\Gamma_f = \{[x_1, x_2, x_3] : x_3 = f([x_1, x_2])\} \text{ eine Fläche im } \mathbb{R}^3.$$

Insbesondere in diesem Fall $(n = 2, m = 1)$ schreibt man lieber $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) = f([x, y])$ (ein Klammerpaar ist redundant).

2.1 Bemerkungen

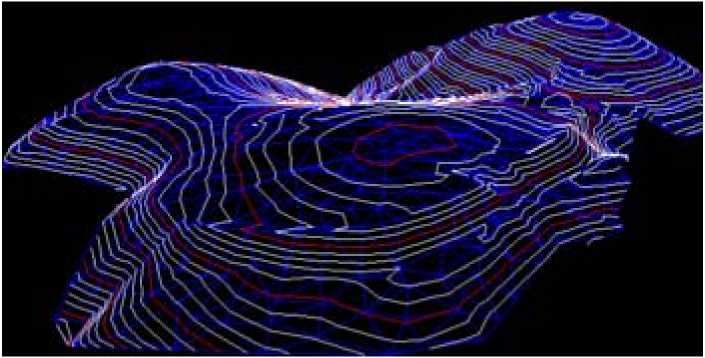
(e) Einfache Beispiele

- $f(x,y) = ax + by + c$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$. Γ_f ist eine Ebene.
- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Γ_f ist ein Kegel.
- $f(x,y) = xy$. Γ_f ist ein Sattel.

- Im Unterschied zu $\mathbb{R}$ gibt es im $\mathbb{R}^n$ keine (natürliche) Ordnung. Deshalb ist "Monotonie" kein sinnvoller Begriff.
- Auch sind Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fast nie injektiv (das heißt zu gegebenem $z \in \mathbb{R}$ gibt es viele $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = z$). Oft ist es nützlich (etwa beim Wandern, oder bei festem Budget z und einer Kostenfunktion $f(x,y)$) die Niveaumengen

$$N(f,z) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = z\}$$

zu kennen.



2.1 Bemerkungen

(h) Oft treten solche oder etwas allgemeinere Niveauflächen

$$N(g,c) = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = c\} \text{ für } g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

also Nebenbedingungen auf. Etwa, falls $g(x)$ die Kosten von Produktionsfaktoren $x_1, \ldots, x_n$ beschreibt und c das verfügbare Budget. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion, so sucht man oft
$\max f(x)$ mit $g(x) = c$.
Dieses Problem nennt man "Optimierung unter Nebenbedingungen".

(i) Weitere Fragestellungen:
- Methoden zur Beschreibung einfacher Abbildungen.
- Explizite Beschreibung von Niveaumengen und Lösung von Gleichungssystemen.
- Führen kleine Änderungen im Argument x zu kleinen Veränderungen beim Funktionswert $f(x)$?
- Beschreibung dieser Änderungen.
- Optimierung mit und ohne Nebenbedingungen.

2.2 Operationen für Funktionen

(a) Addition: Für zwei Funktionen f und $g : A \to \mathbb{R}^m$ definieren wir die Summe argumentweise durch

$$f + g : A \to \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x) + g(x).$$

Es ist also $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Mögliche Interpretation $f(x) =$ Personalkosten, $g(x) =$ Materialkosten.

(b) Analog definiert man für $a \in \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}^m$ das a-fache von f durch

$$af : A \to \mathbb{R}^m, x \mapsto af(x).$$

2.2 Operationen für Funktionen

(c) Zusammenfassen: Für $f : A \to \mathbb{R}^m$ und $g : A \to \mathbb{R}^p$ und jedes $x \in A$ hat $f(x) \in \mathbb{R}^m$ die m Koordination $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ und $g(x) \in \mathbb{R}^p$ hat p Koordination $g_1(x), \ldots, g_p(x)$. Man kann dies zu einem $(m+p)$-dimensionalen Vektor zusammenfassen und erhält

$$[f, g] : A \to \mathbb{R}^{m+p}, x \mapsto [f_1(x), \ldots, f_m(x), g_1(x), \ldots, g_p(x)].$$

(d) Genauso kann man drei oder mehr Funktionen zusammenfassen. Andersherum ist jedes $f : A \to \mathbb{R}^m$ die Zusammenfassung der "Koordinatenfunktion" $f_k : A \to \mathbb{R}, x \mapsto f_k(x)$.
Nutzen: Für viele Fragestellungen reicht es, reellwertige Funktionen zu betrachten.

2.3 Beispiel

In einem Unternehmen werden aus den Rohstoffen $x_1, \ldots, x_n$ zunächst Zwischenprodukte $y_1, \ldots, y_m$ hergestellt, die dann zu Endprodukten $z_1, \ldots, z_p$ weiterverarbeitet werden.
Modell:
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x = [x_1, \ldots, x_n] \mapsto [y_1, \ldots, y_m]$,
$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p, y = [y_1, \ldots, y_p] \mapsto [z_1, \ldots, z_p]$.
Ein Modell für die Abhängigkeit der Endprodukte von den Rohstoffen ist dann $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p : x \mapsto g(f(x))$.

2.4 Definition (Komposition)

Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$ sowie $g : B \to C$ Abbildungen. Die Komposition oder Verkettung $g \circ f$ (lies g nach f oder auch g von f) ist dann

$$g \circ f : A \to C, x \mapsto g(f(x)).$$

Beachte, dass $g \circ f$ nur dann definiert ist, wenn der Bildbereich B von f im Definitionsbereich von g enthalten ist!

2.5 Bemerkung

Selbst wenn $g \circ f$ und $f \circ g$ beide definiert sind (zum Beispiel $A = B = C = \mathbb{R}$) sind diese Verknüpfungen in den allermeisten Fällen verschieden.

Beispiel:

$f(x) = x + 1, g(y) = y^2$. Dann ist

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$ und

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$.