

- Kapitel 1: Vektoren
- Informationen zur Vorlesung:
<http://www.mathematik.uni-trier.de/~wengenroth/>

Bemerkung

In der Vorlesung Elemente der Analysis I wurden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ untersucht (Stetigkeit, Ableitungen, Konvexität, ...). Mit solchen Funktionen kann man aber nur **sehr einfache** Phänomene angemessen beschreiben, zum Beispiel

- stetige Verzinsung: $f(x) = K_0 e^{px}$ (x Zeit)
- Nachfrage $f(x)$, die NUR vom Preis abhängt (x Preis)
- Produktions-Output bei **nur einem** Input-Faktor (x = Menge des Inputs)

Fast alle physikalischen oder ökonomischen Vorgänge hängen aber **von vielen** Faktoren oder Variablen ab und für deren Beschreibung taugen solche Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht!

1.1 Beispiel

- (a) Für die Produktion von Pfannkuchen benötigt man als Zutaten Eier, Milch und Mehl. Zur Beschreibung der Produktion muss man also (mindestens kennen)

$$x = \text{Anzahl Eier}, \quad y = l \text{ Milch und } z = g \text{ Mehl}$$

Beschreibt f den Vorgang des Verrührens und Backens, so erhält man etwa $f(3, 1/4, 80) = 3$ Pfannkuchen oder $f(3, 1/4, 500) = 4$ ungenießbarer Klumpen.

- (b) Man muss die Zutaten einkaufen und hat dabei Kosten $k(x, y, z) = 30x + 80y + 0.05z$ Eurocent.

1.2 Beobachtungen

- Das f in (a) lässt sich nicht leicht beschreiben und diese "Modellbildung" ist nicht Teil der Analysis (siehe aber 1.11).
- Die Zuordnung k in (b) ist viel einfacher.
- Bei mehr als drei Faktoren könnte man statt x, y, z auch $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ zur Bezeichnung der Stückzahlen, Mengen und Gewichte benutzen, aber irgendwann gehen die Buchstaben aus.
- Trick zur Vermeidung dieses Problems: Schreibe x_1, x_2, x_3 statt x, y, z oder $x_1, x_2, \dots, x_{117}$, falls es 117 Faktoren gibt.

So wie Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus 2.1.1 der Vorlesung EA I Abbildungen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sind, hat man auch hier eine Abbildung, die der Nummer $k \in \{1, \dots, 177\}$ eines Faktors die zugehörige Stückzahl oder Menge zuordnet.

1.3 Definition

Ein (reeller) n -dimensionaler Vektor x ist eine Abbildung $\{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$, die also jeder "Koordinatennummer" $k \in \{1, \dots, n\}$ eine Zahl $x_k \in \mathbb{R}$ zuordnet (die k -te Koordinate). Schreibweisen:

$$x = (x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n] \text{ Zeilenvektor und } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

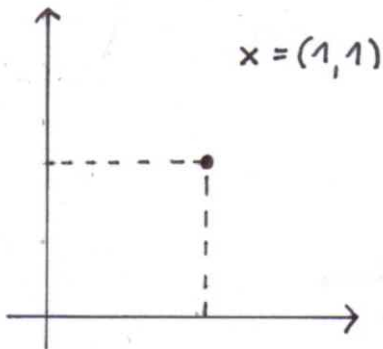
Spaltenvektor.

Mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die Menge aller n -dimensionalen Vektoren.

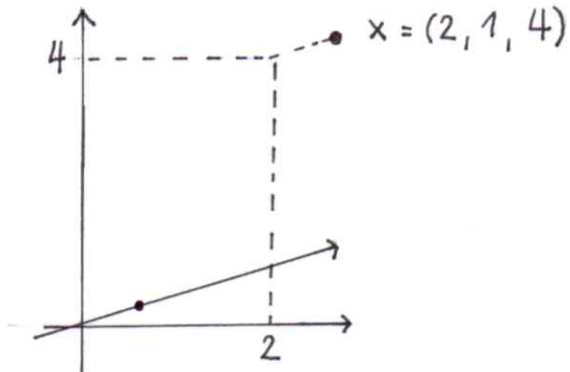
Auch wenn das aus der Definition folgt, lohnt es sich anzumerken, dass zwei Vektoren $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ und $y = [y_1, \dots, y_m] \in \mathbb{R}^m$ genau dann gleich sind, wenn $n = m$ und $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

Veranschaulichung

- des $\mathbb{R}^2$:



- des $\mathbb{R}^3$



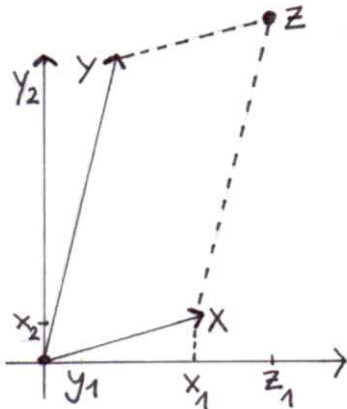
- des $\mathbb{R}^4$: Jeder Punkt des $\mathbb{R}^3$ bekommt eine Farbe (rot = warm, schwarz = kalt).



- des $\mathbb{R}^5$: "Wärmefilm" (x_1, x_2, x_3 Raumkoordinaten x_4 : Temperatur, x_5 : Zeit)

Kräfte und Pfeile

Eine etwas andere Veranschaulichung: Fasse einen Vektor $x = [x_1, \dots, x_n]$ als Kraft aus, die am Ursprung $O = [0, \dots, 0]$ zieht. Bei dieser Vorstellung ist es günstig, den "Punkt" x als "Pfeil" aufzufassen (mit einer Richtung und einer Länge, siehe unten). Hat man nun zwei Kräfte x und y , die am Ursprung ziehen, so ist er einer Gesamtkraft z ausgesetzt:



Die Komponenten von z ergeben sich durch Addition der Komponenten von x und y .

1.4 Definition ($\mathbb{R}^n$ also Vektorraum)

- (a) Für $x = [x_1, \dots, x_n]$ und $y = [y_1, \dots, y_n]$ definieren wir die Summe $x + y = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$.
- (b) Für $x = [x_1, \dots, x_n]$ und $a \in \mathbb{R}$ ist das a -fache von x definiert als $ax = [ax_1, ax_2, \dots, ax_n]$
($a \geq 1$ Streckung, $0 \leq a < 1$ Stauchung, $a < 0$ Spiegelung)

1.5 Rechenregeln

Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gelten

- (a) $x + y = y + x$ Kommutativität
- (b) $(x + y) + z = x + (y + z)$ Assoziativität
- (c) $x + y = 0 \iff x = (-1)y$
- (d) $(a + b)x = ax + bx$ und $a(x + y) = ax + ay$ Distributivität
- (e) $a(bx) = (ab)x$
- (f) $1x = x$

Bemerkung: Die sechs Aussagen sind die Axiome eines allgemeinen (reellen) Vektorraums. Statt $(-1)y$ schreibt man $-y$ und statt $x + (-y)$ auch $x - y$. Wie in EA I schreibt man $\sum_{j=1}^m x^j = x^1 + \dots + x^m$ für Vektoren $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Für $k \in \{1, \dots, n\}$ heißt der Vektor $e^k = [0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0]$, dessen k -te Komponente 1 und alle übrigen 0 sind, der k -te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$. Für jedes $x = [x_1, \dots, x_n]$ gilt dann

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e^k.$$

Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist also auf eindeutige Weise als **Linearkombination** der Einheitsvektoren darstellbar. Die Menge $\{e^1, \dots, e^n\}$ heißt deshalb Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Jede Kraft ist "Überlagerung der Einheitskräfte".

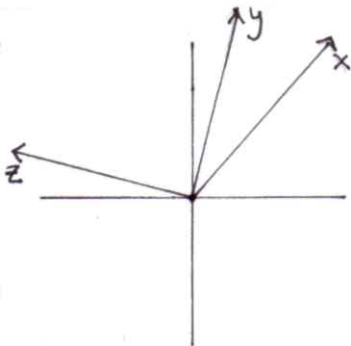
- (b) Allgemeiner heißt $\{z^1, \dots, z^n\}$ eine **Basis** des $\mathbb{R}^n$, wenn **jedes** $x \in \mathbb{R}^n$ auf **eindeutige Weise** als Linearkombination $x = a_1 z^1 + \dots + a_n z^n$ darstellbar ist (siehe Vorlesung Elemente der Linearen Algebra).
- (c) Beispiel: $z^1 = [1, 1]$ und $z^2 = [2, 1]$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$: Sind nämlich $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, so gilt
- $$x = a_1 z^1 + a_2 z^2 \iff [x_1, x_2] = [a_1, a_1] + [2a_2, a_2] =$$
- $$[a_1 + 2a_2, a_1 + a_2] \iff \begin{cases} x_1 = a_1 + 2a_2 \\ x_2 = a_1 + a_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = x_1 - x_2 \\ a_1 = 2x_2 - x_1 \end{cases}$$

1.7 Beispiel

Die Komponenten von $y = [y_1, \dots, y_n]$ seien die Preise von Gütern $g_1, \dots, g_n$ und die Komponenten von $x = [x_1, \dots, x_n]$ seien die Stückzahlen des Ein- oder Verkaufs. Dann ist $\sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ die Bilanz (die also ausgeglichen ist, falls die Summe Null ergibt).

1.8 Definition ($\mathbb{R}^n$ als euklidischer Raum)

- (a) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ Skalarprodukt von x, y . Die Vektoren x, y heißen orthogonal oder senkrecht zueinander, falls $\langle x, y \rangle = 0$. Schreibweise $x \perp y$.
- (b) Für $x \in \mathbb{R}^n$ heißt $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ (euklidische) Länge oder Norm von x .
- (c) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt $\|x - y\|$ euklidischer Abstand zwischen x und y .



$$\langle x, y \rangle > 0, \langle y, z \rangle = 0, \langle x, z \rangle < 0$$

Bemerkung: Ist die Dimension nicht durch den Kontext klar, so schreibt man gelegentlich $\langle x, y \rangle_n$ und $\|x\|_n$.

1.9 Satz

Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gelten

- (a) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ Symmetrie
- (b) $\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle$ Bilinearität
- (c) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ Binomische Formel
- (d) $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ Pythagoras
- (e) $\|ax\| = |a| \|x\|$ positive Homogenität
- (f) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ Ungleichung von Cauchy-Schwarz
- (g) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung
- (h) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ untere Dreiecksungleichung.

Beweis

(a), (b) und (c) durch Ausrechnen. (d) folgt sofort aus (c).

(e) folgt aus $\sqrt{a^2} = |a|$.

(f) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist wegen (c) und (e)

$0 \leq \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|y\|^2 t^2 =: f(t)$. Minimieren:

$f'(t) = 2\langle x, y \rangle + 2\|y\|^2 t = 0$ falls $t = -\langle x, y \rangle / \|y\|^2$. Also

$0 \leq f\left(-\langle x, y \rangle / \|y\|^2\right) = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle^2 / \|y\|^2$ und daher

$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ (der Fall $\|y\| = 0$ ist klar).

(g)

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.

Beweis

(h) $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x + y\| + \|y\|$, also $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ und damit $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$ wegen (e) für $a = -1$. $\square$

Warum ist der Satz von Pythagoras so banal? Bei der Interpretation von $\|x\|$ als Länge wird er schon benutzt!

1.10 Bemerkung

$e^1, \dots, e^n$ Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

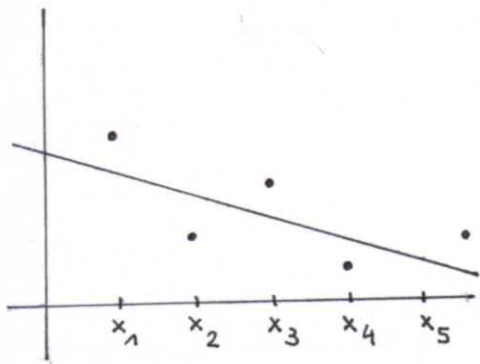
$$x = \sum_{j=1}^n \langle x, e^j \rangle e^j.$$

Dies folgt aus $\langle x, e^j \rangle = \sum_{k=1}^n x_k e_k^j = x_k$, weil $e_k^j = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$. Die

Skalarprodukte $\langle x, e^j \rangle$ sind also gerade die Koeffizienten in der eindeutigen Darstellung als Linearkombination der Standard-Basis.

1.11 Ausgleichsgerade

- (a) Für zwei Merkmale (zum Beispiel Nachfrage und Preis) wird ein sehr schlichtes Modell der Form $f(t) = at + b$ angenommen. Hat man tatsächliche "Daten" $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ermittelt (also zum Beispiel Absätze $y_1, \dots, y_n$ bei Preisen $x_1, \dots, x_n$, so will man die "Modellparameter" $a, b \in \mathbb{R}$ so bestimmen, dass die Geradengleichung möglichst gut zu den Daten passt (und hofft dann, dass $f(t)$ eine gute Prognose für die Fachfrage bei Preis t ist).



1.11 Ausgleichsgerade

- (b) Eine Möglichkeit, den "Abstand" zwischen den Daten $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ und den Funktionswerten $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ zu minimieren, geht auf **Gauß** zurück: Minimiere die Summe der Residuenquadrate, das heißt

$$d(a, b) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - y_k)^2 = \sum_{k=1}^n (ax_k + b - y_k)^2 = \|ax + bu - y\|^2$$

wobei $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ und $u = [1, \dots, 1]$. **Dann** heißt $f(t) = at + b$ Ausgleichsgerade der Daten.

1.11 Ausgleichsgerade

(c) Mit Satz 1.9 (b) und (c) berechnen wir

$$d(a, b) = b^2 \|u\|^2 + 2b \langle ax - y, u \rangle + \|ax - y\|^2$$

Für festes $a \in \mathbb{R}$ ist dies die Gleichung einer nach oben geöffneten Parabel in der Variablen b und die ist minimal für

$$b_{\min} = -\frac{\langle ax - y, u \rangle}{\|u\|^2} = -a\bar{x} + \bar{y}, \text{ wobei } \bar{x} = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \text{ und}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \text{ die arithmetischen Mittelwerte sind. Also gilt}$$

$$\begin{aligned} d(a, b) &\geq d(a, b_{\min}) = -\frac{\langle ax - y, u \rangle^2}{\|u\|^2} + \|ax - y\|^2 \\ &= a^2 \left(\|x\|^2 - n\bar{x}^2 \right) - 2a \langle x, y \rangle + 2an \bar{x} \bar{y} + \|y\|^2 - n\bar{y}^2. \end{aligned}$$

Dies ist wieder eine Parabel in der Variablen a und daher minimal für $a_{\min} = \frac{\langle x, y \rangle - n \bar{x} \bar{y}}{\|x\|^2 - n \bar{x}^2}$. Wir haben damit gezeigt:

1.12 Satz über Ausgleichsgeraden

Für Daten $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit mindestens zwei verschiedenen $x_1, \dots, x_n$ ist die Ausgleichsgerade $f(t) = at + b$ gegeben durch

$$a = \frac{\langle x, y \rangle - n\bar{x}\bar{y}}{\|x\|^2 - n\bar{x}^2} \text{ und } b = \bar{y} - a\bar{x}.$$