J. Wengenroth
T. Schlierkamp

WS 15/16
04.01.2016

Einführung in die Mathematik (Lehramt)
Übungsblatt 9

Abgabe: Dienstag, 12.01.2016 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Di, 12.01.2016, 8:30-10:00 Uhr **HS2**;
Mi, 13.01.2016 18:00-19:30 Uhr **E51**

Aufgabe 34 (5 Punkte)
Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{2^n}$, (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{2^{n^2}}$, (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{10^n(n+1)^2}{(3n^2+2)n!}\right)^{2n}$,

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} z^n$ für $z, c \in \mathbb{C}$, (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ mit $x_n = \begin{cases} 0 & , n \text{ ungerade} \\ 2/n, & n \text{ gerade} \end{cases}$.

Aufgabe 35 (3 Punkte)
Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ (b) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ (c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\left(\frac{k+z}{k}\right)^k}{n}$ für $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 36 (2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die reelle Exponentialfunktion $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ streng monoton wächst.

(b) Charakterisieren Sie die $z \in \mathbb{C}$ mit $|\exp(z)| = 1$.

Aufgabe 37 (6 Punkte)
Seien $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

(a) Zeigen Sie für $1 \leq n \leq m$

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = A_m b_m - A_{n-1} b_n + \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

(Tipp: $a_k = A_k - A_{k-1}$)

(b) Falls $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge ist, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_k$.

(c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n/n$?

Aufgabe 38 (4 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, \infty[^{\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge, so dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(b) Untersuchen Sie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ auf Konvergenz.