J. Wengenroth
T. Schlierkamp

WS 15/16
14.12.2015

Einführung in die Mathematik (Lehramt)
Übungsblatt 8

Abgabe: Dienstag, 05.01.2016 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Di, 05.01.2016, 8:30-10:00 Uhr **HS2**;
Mi, 06.01.2016 18:00-19:30 Uhr **E51**

Aufgabe 29 (8 Punkte)

(a) Für $c \geq 1$ sei $x_n = \sqrt[n]{c} - 1$. Zeigen Sie $\sqrt{n} x_n \to 0$.

(b) Sei $y_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Zeigen Sie $(\sqrt{n} y_n)^3 \to 0$.

(c) Zeigen Sie $z_n = z^n/n! \to 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(d) Zeigen Sie $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ konvergieren gegen den gleichen Grenzwert, den wir e taufen.

Hinweis: Schätzen Sie in (a) $(x_n + 1)^n$ (bzw. in (b) $(y_n + 1)^n$) mithilfe des Binomialsatzes gegen den Summand für $k = 1$ (bzw. $k = 3$) ab.

Aufgabe 30 (5 Punkte)
Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:
(a) $a_n = \dfrac{(2-n)(3-2n)}{(1-n)(1+3n)}$, (b) $b_n = \dfrac{\sqrt[n]{3n^n + 5n^2}}{n + \sqrt[n]{3n}}$ (c) $c_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

Aufgabe 31 (5 Punkte)
Für $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definieren wir die Folge der arithmetischen Mittel $s_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Zeigen Sie: $x_n \to x_\infty \Rightarrow s_n \to x_\infty$.
Geben Sie ein Beispiel an, in dem die umgekehrte Implikation nicht gilt.

Aufgabe 32 (6 Punkte)
Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:
(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)(n+4)}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$
Hinweis: (d) Man schätze Paare von Summanden nach unten ab.

Aufgabe 33 (6 Punkte) **Weihnachtsaufgabe**
Frau Holle ist verzweifelt, weil Sie das Rezept für Schneeflocken verloren hat. Rentier Rudi versucht sie mit folgendem Vorschlag zu trösten:
Man beginne mit einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a und setze auf die Mitte jeder Seite ein kleineres gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $a/3$. Dadurch erhält man eine Figur mit 12 Seiten auf deren Mitten man wiederum kleine gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge $a/3^2 = a/9$ setze. Macht man so weiter, erhält man eine Figur, die wie eine schöne Schneeflocke aussieht.
Frau Holle ist begeistert, aber ihr stellen sich einige Fragen:

(a) Wie groß ist der Umfang x_n der Figur nach n solchen Schritten?

(b) Wie groß ist der Flächeninhalt y_n?

(c) Konvergieren die betrachteten Folgen x_n, y_n?

Helfen Sie Frau Holle und skizzieren Sie einige der entstehenden Figuren.