J. Wengenroth
T. Schlierkamp

WS 15/16
07.12.2015

Einführung in die Mathematik (Lehramt)
Übungsblatt 7

Abgabe: Dienstag, 15.12.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Di, 15.12.2015, 8:30-10:00 Uhr **HS2**;
Mi, 16.12.2015 18:00-19:30 Uhr **E51**

Aufgabe 25 (10 Punkte)
Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(a) $a_n = \dfrac{n^2 + \sqrt{n}}{(n + \sqrt{n})^2}$,

(b) $b_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

(c) $c_n = n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

(d) $d_n = \prod_{j=1}^{n} \delta_j$ für eine Folge $\delta \in [0,1]^{\mathbb{N}}$,

(e) $e_{n+1} = (e_n)^2 + \frac{1}{4}$ mit $e_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Aufgabe 26 (3 Punkte)
Seien $a, b \geq 0$. Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

Aufgabe 27 (4+1 Punkte)

(a) Für $a > 0$ und $x_0 > 0$ definieren wir rekursiv $x_{n+1} = \dfrac{x_n + a/x_n}{2}$.
Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

(b) Nähern Sie $\sqrt{5}$ an, indem Sie zum Startwert $x_0 = 3$ die Iterierte x_4 bilden. Vergleichen Sie die ersten 10 Nachkommastellen mit dem Ergebnis eines Taschenrechners.

Aufgabe 28 (2 Punkte + 5 Bonuspunkte)

(a) Gesucht ist $\Phi \in \mathbb{R}$, so dass die geometrische Folge $x_n = \Phi^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ die folgende Eigenschaft besitzt:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{*}$$

Bestimmen Sie beide Lösungen Φ_1 und Φ_2 mit $\Phi_1 < \Phi_2$. Zeigen Sie ferner, dass auch Linearkombinationen $\alpha a_n + \beta b_n$ der Folgen $a_n = \Phi_1^n$ und $b_n = \Phi_2^n$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Bedingung $(*)$ erfüllen.

(b) Wir definieren die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n \in N_0}$ rekursiv durch

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad \text{wobei } f_0 = 0, \ \ f_1 = 1.$$

Leiten Sie eine explizite Formel her, indem Sie f_n als Linearkombination von a_n und b_n darstellen. (Also $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gesucht, so dass $f_n = \alpha a_n + \beta b_n$.)

(c) Zeigen Sie, dass das Verhältnis aufeinanderfolgender Fibonacci Zahlen $q_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ gegen Φ_2 konvergiert.