

Einführung in die Mathematik (Lehramt)
Übungsblatt 6

Abgabe: Dienstag, 08.12.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5

Übungen: Di, 08.12.2015, 8:30-10:00 Uhr **HS2**;

Mi, 09.12.2015 18:00-19:30 Uhr **E51**

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Berechnen Sie für $z = (1+i)/\sqrt{2}$ die Potenzen $z^0, z^1, \dots, z^8$ und skizzieren Sie diese als Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene. Wie sieht allgemeiner z^n für $n \in \mathbb{Z}$ aus?

Aufgabe 21 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Lösungen z_1, z_2, z_3 der Gleichung $z^3 - 1 = 0$ in $\mathbb{C}$ ein gleichseitiges Dreieck bilden, d.h. $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

Fertigen Sie auch eine Skizze an.

Hinweis: Klammern Sie $(z-1)$ aus.

Aufgabe 22 (4+3 Punkte) (+1 Bonuspunkt)

(a) Beweisen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$$

und folgern Sie damit die Parallelogrammgleichung

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

(b) Zeigen Sie für die Abbildung $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto 1/\bar{z}$, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) \neq 0$

$$\frac{\operatorname{Im}(f(z))}{\operatorname{Re}(f(z))} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$$

gilt. Was bedeutet dies geometrisch? Zeichnen Sie dazu $z_1 = 1+i$, $f(z_1)$, $z_2 = (1-2i)$ und $f(z_2)$ in der Gaußschen Zahlenebene ein und interpretieren Sie.

Aufgabe 23 (4 Punkte)

Es sei $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$a = \sqrt{\frac{|w|+u}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{|w|-u}{2}}$$

und $z = a + ib$. Zeigen Sie $z^2 = w$, falls $v \geq 0$ und $\bar{z}^2 = w$, falls $v \leq 0$.

Aufgabe 24 (+4 Bonuspunkte)

Für abgeschlossene Intervalle $\emptyset \neq I, J \subseteq \mathbb{R}$ heißt

$$R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in I, \operatorname{Im}(z) \in J\}$$

ein „Kästchen“. Zeigen Sie das *Kästchenschachtelungsprinzip*:

$$\emptyset \neq R_{n+1} \subseteq R_n \text{ Kästchen (für alle } n \in \mathbb{N}) \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n \neq \emptyset.$$

100 Bonuspunkte und eine Flasche Champagner für einen Beweis des Kreisschachtelungsprinzips mit den bisher eingeführten Begriffen der Vorlesung.