J. Wengenroth
T. Schlierkamp

WS 15/16
23.11.2015

Einführung in die Mathematik (Lehramt)
Übungsblatt 5

Abgabe: Dienstag, 01.12.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Di, 01.12.2015, 8:30-10:00 Uhr **HS2**;
Mi, 02.12.2015 18:00-19:30 Uhr **E51**

Aufgabe 16 (2+2 Punkte)
Für eine Indexmenge $I \neq \emptyset$ seien $A_i \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt für alle $i \in I$. Zeigen Sie

(a) $\sup\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \sup\{\sup A_i : i \in I\}$,

(b) $\sup\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \leq \inf\{\sup A_i : i \in I\}$ und geben Sie ein Beispiel an, so dass hier keine Gleichheit gilt.

Beachten Sie die Konventionen $\sup A = +\infty$, falls A nicht nach oben beschränkt ist und $\inf A = -\infty$, falls A nicht nach unten beschränkt ist sowie $\sup \emptyset = -\infty$.

Aufgabe 17 (3 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende surjektive Abbildung. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und die Umkehrfunktion auch streng monoton wächst.

Aufgabe 18 (8 Punkte)
Es seien $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zwei Abbildungen, definiert durch

$$a(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Zeigen Sie für $A = \{a(n) : n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{b(n) : n \in \mathbb{N}\}$, dass

$$2 < \sup A \leq \inf B < 3.$$

Hinweis: Zeigen Sie $a(n) \leq a(n+1) \leq b(n+1) \leq b(n)$ indem Sie die Quotienten $\frac{a(n+1)}{a(n)}$ und $\frac{b(n)}{b(n+1)}$ mithilfe der Bernoullischen Ungleichung abschätzen.

Aufgabe 19 (3 + 2 Punkte)

(a) Skizzieren Sie $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als Matrix mit unendlich langen Zeilen und Spalten. Zeichnen Sie dort die Diagonalen $D_n := \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : j + k = n + 1\}$ für n=1,2,3 ein.
Geben Sie eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an.
Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und konstruieren Sie f, indem Sie die Diagonalen aneinanderhängen.

(b) Zeigen Sie, dass es surjektive Abbildungen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ und $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ gibt.