

Einführung in die Mathematik (Lehramt)

Übungsblatt 4

Abgabe: Dienstag, 24.11.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5

Übungen: Di, 24.11.2015, 8:30-10:00 Uhr **HS2**;

Mi, 25.11.2015 18:00-19:30 Uhr **E51**

Aufgabe 12 (3+1+1 Punkte)

Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Auf $X \times X$ definieren wir eine Relation $\preceq$ durch $(a, b) \preceq (x, y)$ falls $a < x$ oder $(a = x \text{ und } b \leq y)$.

- (a) Zeigen Sie, dass dadurch eine Ordnung auf $X \times X$ definiert ist.
- (b) Im Fall $X = \mathbb{R}$ fassen wir $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als eine Zeichenebene auf. Skizzieren Sie die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \preceq (1, 2)\}.$$

- (c) Ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Ordnung $\preceq$ ordnungsvollständig?
(Besitzt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < 1\}$ eine kleinste obere Schranke?)

Aufgabe 13 (3 Punkte)

Sei X ein geordneter Körper und $e : \mathbb{Z} \rightarrow X$ der zugehörige Ringmorphismus. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$ die BERNOULLISCHE UNGLEICHUNG

$$(1 + x)^n \geq 1 + e(n)x,$$

wobei $(1 + x)^n$ als Produkt der n Faktoren $1 + x$ definiert ist.

Aufgabe 14 (5 Punkte)

Wir versehen $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit den Operationen

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \text{ und } (a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc).$$

Zeigen Sie, dass damit $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ein Körper ist und die Gleichung

$$(a, b) \odot (a, b) =: (a, b)^2 = (2, 0)$$

eine Lösung besitzt.

(Für den Nachweis des Körpers reicht es, wenn Sie die Assoziativität der Multiplikation $\odot$ verifizieren, die neutralen Elemente und das multiplikative Inverse $(a, b)^{-1}$ von $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{(0, 0)\}$ bestimmen.)

Aufgabe 15 (3+3+1 Punkte)

Seien A, B nicht leere nach oben beschränkte Teilmengen eines geordneten Körpers, die Suprema $\sup A$ beziehungsweise $\sup B$ besitzen. Zeigen Sie

- (a) $-A := \{-a : a \in A\}$ besitzt ein Infimum und es gilt $\inf(-A) = -\sup A$,
- (b) $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ besitzt ein Supremum und $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
- (c) Gilt $\sup(A - B) = \sup A - \sup B$?