J. Wengenroth
T. Schlierkamp

WS 15/16
09.11.2015

Einführung in die Mathematik (Lehramt)
Übungsblatt 3

Abgabe: Dienstag, 17.11.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Di, 17.11.2015, 8:30-10:00 Uhr **HS2**;
Mi, 18.11.2015 18:00-19:30 Uhr **E51**

Aufgabe 8 (5 Punkte)
Für jedes i einer Menge I sei $A_i \subseteq X$ gegeben. Für beliebige $J \subseteq I$ definiere

$$\bigcup_{j\in J} A_j := \{x \in X : \exists j \in J \text{ mit } x \in A_j\} \quad \text{(insbesondere } \bigcup_{j\in\emptyset} A_j = \emptyset\text{)},$$
$$\bigcap_{j\in J} A_j := \{x \in X : \forall j \in J \text{ ist } x \in A_j\} \quad \text{(insbesondere } \bigcap_{j\in\emptyset} A_j = X\text{)}.$$

Zeigen Sie für $J, K \subseteq I$:

(a) $\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \cup \left(\bigcup_{k\in K} A_k\right) = \bigcup_{i\in J\cup K} A_i$,

(b) $\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \cap \left(\bigcap_{k\in K} A_k\right) \subseteq \bigcap_{i\in J\cap K} A_i$ und geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Gleichheit im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 9 (5 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f *genau dann* injektiv ist, *wenn* f surjektiv ist. Gibt es für $n < m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ eine injektive Abbildung $g : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., n\}$?

Aufgabe 10 (5 Punkte)
Zeigen Sie für Mengen $A, B \subseteq X$ und die *Indikatorfunktion* $I_A : X \to \{0, 1\}$, $I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}$ folgende Identitäten:

(a) $I_{A\cap B} = I_A \cdot I_B$, (wobei $f \cdot g : X \to \{0, 1\}$, $x \mapsto f(x)g(x)$)

(b) $I_{A\triangle B} = |I_A - I_B|$.

Aufgabe 11 (5 Punkte)
Für eine Menge X sei $\{0, 1\}^X$ die Menge der Abbildungen von X nach $\{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass

$$F : \mathscr{P}(X) \to \{0, 1\}^X,\ A \mapsto I_A$$

eine Bijektion ist, wobei $\mathscr{P}(X)$ die Menge aller Teilmengen von X (Potenzmenge) bezeichnet und I_A die Indikatorfunktion (vgl A10).
Hinweis (Surjektivität): Für $f \in \{0, 1\}^X$ betrachte man $A = f^{-1}(\{1\})$.