J. Wengenroth WS 15/16
T. Schlierkamp 03.11.2015

Einführung in die Mathematik (Lehramt)
Übungsblatt 2
Abgabe: Dienstag, 10.11.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Di, 10.11.2015, 8:30-10:00 Uhr **HS2**;
Mi, 11.11.2015 18:00-19:30 Uhr **E51**

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Zeigen Sie für zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$:

(a) f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv,

(b) f, g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv,

(c) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv,

(c) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv.

Aufgabe 6 (8 Punkte)
Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie für beliebige Teilmengen $A, B \subseteq X$:

i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
Zeigen Sie mittels Gegenbeispiel, dass in ii) keine Gleichheit gilt. (Man beachte Aufgabe 7)

(b) Zeigen Sie für beliebige Teilmengen $M, N \subseteq Y$:

i) $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$,
ii) $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.

(Das Urbild ist gemeint. Im Allgemeinen gibt es keine Umkehrfunktion.)

Aufgabe 7 (6 Punkte)
Zeigen Sie für eine Abbildung $f : X \to Y$ auf einer nicht-leeren Menge X sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f ist injektiv.

(2) Es gibt eine Linksinverse, d.h. es gibt eine Abb. $L : Y \to X$, so dass $L \circ f = id_X$, wobei $id_X : X \to X$, die Identität $id_X(x) = x$ ist.

(3) Für alle Mengen Z und Funktionen $g, h : Z \to X$ folgt aus der Gleichheit $f \circ g = f \circ h$ bereits $g = h$ (Linkskürzbarkeit).

(4) Für alle $A, B \subseteq X$ gilt $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$.

Hinweis: Zeigen Sie die Äquivalenzen mittels *Ringschluss*, indem Sie nur die 4 Implikationen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) zeigen. Für (1) $\Rightarrow$ (2) überprüfe man die Wohldefiniertheit der Abb. $L : Y \to X$, $L(y) = \begin{cases} x & \text{falls } y = f(x) \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$ für ein festes $x_0 \in X$. Betrachten Sie bei (3) $\Rightarrow$ (4) geeignete konstante Abbildungen g und h und nutzen Sie bei (4) $\Rightarrow$ (1) einelementige Mengen.