J. Wengenroth
T. Schlierkamp

WS 15/16
01.02.2016

Einführung in die Mathematik (Lehramt)
Übungsblatt 13

Abgabe: Dienstag, 09.02.2016 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Di, 09.02.2016, 8:30-10:00 Uhr **HS2**;
Mi, 10.02.2016 18:00-19:30 Uhr **E51**

Aufgabe 53 (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \begin{cases} \sin(z)/z & , z \neq 0 \\ 1 & , z = 0 \end{cases}$ ist eine stetige Funktion.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $L_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} |\exp(ixk/n) - \exp(ix(k-1)/n)|$. Interpretieren Sie $L_n(x)$ für $x \in [0, 2\pi[$ geometrisch und zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $L_n(x) = 2n|\sin(x/(2n))|$ sowie $L_n(x) \to |x|$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 54 (6 Punkte)

(a) Skizzieren Sie $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) > 1\}$ und bestimmen Sie $\overline{A}$.

(b) Bestimmen Sie $\overline{\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}}$.

(c) Zeigen Sie $\overline{\{z \in \mathbb{C} : f(z) < 1\}} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : f(z) \leq 1\}$ für eine stetige Abb. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und geben Sie ein Beispiel an, in dem hier keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 55 (8 Punkte)
Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt *wegzusammenhängend* (wegzshgd.), falls $\forall a, b \in A$, $\exists\ f : [0, 1] \to A$ stetig mit $f(0) = a$ und $f(1) = b$ (solch ein f heißt *Weg* von a nach b). Zeigen Sie:

(a) Für $I \subseteq \mathbb{R}$ gilt: I wegzshgd. $\iff$ I Intervall.

(b) A, B wegzshgd. und $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ wegzshgd.

(c) Für $\alpha \in \mathbb{R}^2$ ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{\alpha\}$ wegzshgd.

(d) A wegzshgd. und $g : A \to Y$ stetig wobei (Y, D) metrischer Raum $\Rightarrow g(A)$ wegzshgd.

(e) Es gibt keine Bijektion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, so dass f und f^{-1} stetig sind.

Aufgabe 56 (8 Punkte)
Für $a, b \in \mathbb{C}$ sei $D(a, b) = \begin{cases} |a - b| & \text{falls } \{a, b\} \text{ linear abhängig} \\ |a| + |b| & \text{sonst.} \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass D eine Metrik auf $\mathbb{C}$ definiert.

(b) Skizzieren Sie Kugeln $B_D(1, \varepsilon)$ für $0 < \varepsilon < 1$ und $\varepsilon > 1$.

(c) Zeigen Sie $\mathrm{id} : (\mathbb{C}, D) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$, $x \mapsto x$ ist stetig, aber id^{-1} ist es nicht.

(d) Charakterisieren Sie Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \to 1$ in $(\mathbb{C}, D)$.