J. Wengenroth WS 15/16
T. Schlierkamp 25.01.2016

Einführung in die Mathematik (Lehramt)
Übungsblatt 12

Abgabe: Dienstag, 02.02.2016 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Di, 02.02.2016, 8:30-10:00 Uhr **HS2**;
Mi, 23.02.2016 18:00-19:30 Uhr **E51**

Aufgabe 49 (5+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass durch $\tan :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion definiert ist.
Hinweis zur Surjektivität: Man Zeige $\forall m \in \mathbb{N}\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N$: $\tan(x_n) \geq m$ beziehungsweise $\tan(-x_n) \leq -m$, wobei $x_n = \pi/2 - 1/n \to \pi/2$.

(b) Was können Sie im Hinblick auf Stetigkeit und Monotonieverhalten über die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sagen? Berechnen Sie den Wert $\arctan(1)$ und skizzieren Sie beide Funktionen tan beziehungsweise arctan.

Aufgabe 50 (4 Punkte)
Ein Radfahrer fährt (mit veränderlicher Geschwindigkeit womöglich sogar Pausen) innerhalb einer Stunde 20 km. Zeigen Sie, dass es ein Zeitintervall von 30 Minuten gibt, in dem der Radfahrer genau 10 km zurücklegt.
Hinweis: Gehen Sie von einer stetigen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ aus, die zur Zeit $t \in [0,1]$ den zurückgelegten Weg in km beschreibt ($t = 1$ entspricht einer Stunde). Bilden Sie daraus eine Funktion, die angibt wie viel km in einer halben Stunde zurückgelegt wurden.

Aufgabe 51 (5 Punkte)
Untersuchen Sie die Konvergenz der durch $x_n = n^p \log(n)$ definierten Folge für $p \in \mathbb{C}$. Für welche $q \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^q \log(n)}$?
Hinweis: Nutzen Sie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert (A37).

Aufgabe 52 (6 Punkte)

(a) Für $a \geq 0$ und $t \in [0,1]$ gilt: $\quad e^{ta} - 1 \leq t(e^a - 1)$.

(b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ (o.B.d.A. $x - y \geq 0$) und $t \in [0,1]$ gilt:
$$\exp(tx + (1-t)y) \leq te^x + (1-t)e^y.$$

(c) Für alle $a, b \geq 0$ und $p, q \in]1, \infty[$ mit $1/p + 1/q = 1$ ist
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

(d) Seien $p, q \in]1, \infty[$. Für $x \in \mathbb{C}^n$ sei $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Zeigen Sie im Fall $1/p + 1/q = 1$ für $x, y \in \mathbb{C}^n$:
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$
(Reduzieren Sie auf den Fall $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ und verwenden Sie (c)).