Einführung in die Mathematik (Lehramt)
Übungsblatt 11

Abgabe: Dienstag, 26.01.2016 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5

Übungen: Di, 26.01.2016, 8:30-10:00 Uhr **HS2**;

Mi, 27.01.2016 18:00-19:30 Uhr **E51**

Aufgabe 44 (4 Punkte)

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ und $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$.

- (a) Zeigen Sie $\cosh, \sinh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind stetige Funktionen auf $\mathbb{C}$ und leiten Sie ferner deren Potenzreihendarstellungen her.
- (b) Beweisen Sie $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- (c) Zeigen Sie, dass $\sinh|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wächst.

Aufgabe 45 (6 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ erweitern wir die Definition des Binomialkoeffizienten durch $\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j)$.

Berechnen Sie den Konvergenzradius $R(\alpha)$ der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ sowie den Wert der Reihe für $\alpha \in \{-1, -2, -3\}$ im Fall $z \in B(0, R(\alpha))$.

Tipp: Cauchy-Produkt für $\alpha \in \{-2, -3\}$.

Aufgabe 46 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Konvergenzradius $R > 0$ der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, wobei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Fibonacci-Folge aus Aufgabe 28 (Ü7) ist. Zeigen Sie außerdem:

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} \text{ für alle } z \in B(0, R).$$

Tipp: Berechnen Sie $f(z)(1 - z - z^2)$.

Aufgabe 47 (2+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{\exp(\exp(z + z^2 + z^3))}{1 + z\bar{z}}$ ist stetig auf $\mathbb{C}$.

(b) Untersuchen Sie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ auf Stetigkeit und geben Sie an wo f stetig beziehungsweise unstetig ist. Skizzieren Sie auch die Graphen.

Bitte wenden

Aufgabe 48 (5 Punkte)

(a) Sei $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ sowie $a_0 \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $0 < r < R$ gibt, so dass h auf $B(0, r)$ keine Nullstelle besitzt.

(b) Seien $f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=q}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien $R_f, R_g > 0$ sowie $a_p b_q \neq 0$ und $p \geq q$. Zeigen Sie, es gibt ein $r > 0$ und ein $c \in \mathbb{C}$, so dass die Funktion $Q : B(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$,
 $z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)}{g(z)}, & z \neq 0 \\ c, & z = 0 \end{cases}$ wohldefiniert und stetig ist.