Einführung in die Mathematik (Lehramt)
Übungsblatt 10

Abgabe: Dienstag, 19.01.2016 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5

Übungen: Di, 19.01.2016, 8:30-10:00 Uhr **HS2**;

Mi, 20.01.2016 18:00-19:30 Uhr **E51**

Aufgabe 39 (5 Punkte)

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ und $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

(a) Leiten Sie Reihendarstellungen für $\cos(z)$ und $\sin(z)$ her.

(b) Zeigen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$:

(1) $\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$;

(2) $\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$;

(3) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.

Aufgabe 40 (3 Punkte)

Sei $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

Falls (1) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ oder (2) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ existiert, so besitzt die

Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Konvergenzradius R .

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2} z^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} z^n$

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Berechnen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)z^n$ sowie $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

Tipp: $2 \sum_{k=0}^n (k+1) = (n+1)(n+2)$

Aufgabe 43 (4 Punkte)

Schreiben Sie für $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ folgende Funktionen als Potenzreihen um 0 in möglichst großen Kreisen:

(a) $f(z) = \frac{1}{1 - z/a}$,

(b) $g(z) = \frac{1}{b - z}$,

(c) $h(z) = \frac{1}{(a - z)(b - z)}$.