J. Wengenroth Wintersemester 2013/14
13.11.2013

Einführung in die Mathematik
Blatt 3
Abgabe: Mittwoch, 27.11.13, bis 12 Uhr, Übungskasten 5

Anregungen für die Tutorien in der Woche 18. - 22. November

Sind M eine endliche Menge und $f : M \to \mathbb{N}_0$ eine Abbildung, so definieren wir $\sum\limits_{x \in M} f(x)$ durch eine Rekursion bezüglich $m = |M|$: Die „leere Summe“ $\sum\limits_{x \in \emptyset} f(x)$ ist 0, und falls $|M| = m+1$ und $x_0 \in M$ ein festes Element ist, definieren wir $\sum\limits_{x \in M} f(x) = \left(\sum\limits_{x \in M \setminus \{x_0\}} f(x) \right) + f(x_0)$. Wegen der Rechenregeln für die Addition hängt dies nicht von der speziellen Wahl von x_0 ab. Falls $M = \{0, \ldots, m\}$ schreibt man oft $\sum\limits_{x \in M} f(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} f(k)$.

T 11
Seien N eine endliche Menge und $A_0, \ldots, A_m$ Teilmengen mit $N = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_m$. Zeigen sie

$$|N| = \sum_{k=0}^{m} |A_k| \iff A_j \cap A_k = \emptyset \text{ für alle } j \neq k.$$

T 12
Zeigen Sie für disjunkte endliche Mengen M und N und $k \in \mathbb{N}_0$, dass

$$|\mathscr{P}_k(N \cup M)| = \sum_{\ell=0}^{k} |\mathscr{P}_\ell(N)|\,|\mathscr{P}_{k-\ell}(M)|.$$

Folgern Sie daraus $\sum\limits_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\binom{m}{k-\ell} = \binom{n+m}{k}$, und berechnen Sie $\sum\limits_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}^2$.

T 13
Seien M und N endliche Mengen mit $|M| = |N|$ und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) f ist injektiv,

(2) f ist bijektiv,

(3) f ist surjektiv.

T 14
Zeigen Sie, dass eine Menge M genau dann unendlich ist, wenn es eine injektive Abbildung $g : M \to M$ gibt, die nicht surjektiv ist.

T 15
Zeigen Sie, dass

$$\mathscr{P}_e(\mathbb{N}_0) = \{A \in \mathscr{P}(\mathbb{N}_0) : A \text{ endlich}\}$$

abzählbar ist.

Hausaufgaben, Abgabe bis Mittwoch, 27. November

H 11

An der Universität haben die Fächer F_1, F_2, F_3 genau 212, 346 bzw. 311 Studenten. 92 Studierende belegen sowohl F_1 also auch F_2, 117 studieren F_1 und F_3 und 123 sowohl F_2 als auch F_3 (manche Studenten belegen auch alle drei Fächer).
Wieviele Studenten studieren höchstens zwei der drei Fächer? Beweisen Sie Ihre Antwort.

H 12

Zeigen Sie (durch Induktion nach $m \in \mathbb{N}_0$) für $n, m \in \mathbb{N}_0$, dass $\sum\limits_{k=1}^{m} \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+m}{n+1}$.

Folgern Sie daraus Formeln für $\sum\limits_{k=1}^{m} k$, $\sum\limits_{k=1}^{m} k^2$ und $\sum\limits_{k=1}^{m} k^3$.

H 13

Seien M eine endliche Menge, k, ℓ, $r \in \mathbb{N}_0$ und $T \in \mathscr{P}_k(M)$. Bestimmen Sie mit Beweis $|\{A \in \mathscr{P}_\ell(M) : |A \cap T| = r\}|$ in Abhängigkeit von k, ℓ, r und $m = |M|$. Wie kann man die Zahlen

$$\frac{|\{A \in \mathscr{P}_\ell(M) : |A \cap T| = r\}|}{|\mathscr{P}_\ell(M)|}$$

im Fall von $\ell = k = 6$ und $m = 49$ interpretieren?

H 14

Untersuchen Sie folgende Mengen auf Abzählbarkeit:

(a) $A = \{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} : \exists n \in \mathbb{N}_0 \ \forall m \geq n \ f(m) = 0\}$,

(b) $B = \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} \setminus A$,

(c) $C = \{f \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0} : f \text{ monoton wachsend}\}$, wobei f monoton wächst beziehungsweise fällt, falls $f(n) \leq f(n+1)$ beziehungsweise $f(n+1) \leq f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,

(d) $D = \{f \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0} : f \text{ monoton fallend}\}$.

Tipp zu (c): Wie kann man aus jeder Funktion $g : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ eine monton wachsende Funktion basteln? Der Teil (d) ist etwas schwieriger, dafür gibt es 3 Sonderpunkte.

H 15

(a) Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es genau ein Paar $(k, r) \in \mathbb{N}_0 \times \{0, \ldots, m-1\}$ gibt mit

$$n = k \cdot m + r.$$

Tipp: Die Existenz kann man durch Induktion nach n zeigen. Für die Eindeutigkeit betrachte man zwei Darstellungen $n = k \cdot m + r = \tilde{k} \cdot m + \tilde{r}$ und folgere aus der Annahme $r < \tilde{r}$ einen Widerspruch.

(b) Sind $m < n$ und k, r wie in (a), so zeige man, dass $ggT(m, n) = ggT(m, r)$ gilt, wobei $ggT(m, n) = \max\{k \in \mathbb{N} : k|m \text{ und } k|n\}$.