Einführung in die Mathematik

und

Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

J. Wengenroth

Trier, 2009/2010

Universität Trier

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Mathematische Sprache

1.1 Was ist Mathematik? Diese Frage lässt sich nicht in ein paar Sätzen beantworten, aber es ist zu hoffen, am Ende dieser Vorlesung vielleicht keine Antwort aber doch ein Ahnung zu haben. Mathematik unterscheidet sich in zwei Aspekten von anderen Wissenschaften: Die *Untersuchungsgegenstände* sind keine realen Phänomene, sondern abstrakte Dinge wie Zahlen, Mengen, Funktionen oder Strukturen, und die *Methode*, um wahre Aussagen über diese Dinge zu treffen, beruht nicht auf Beobachtungen sondern auf Beweisen.

Die Schulmathematik vermittelt nur ein sehr eingeschränktes Bild dessen und unterscheidet sich erheblich von den Vorlesungen an der Universität. Die Universitätsmathematik ist jedenfalls KEINE Rezeptsammlung für Aufgaben eines bestimmten Typs.

1.2 Missstände der Umgangssprache. Der Satz *Vögel können fliegen* meint nicht, dass alle Vögel fliegen können (zum Beispiel können Pinguine nicht fliegen), sondern eher, dass Vögel typischer Weise fliegen können (so etwas könnte man eine *generische* Aussage nennen). Für diesen und viele andere umgangssprachliche Sätze gilt dann der *Modus ponens* nicht:

Vögel können fliegen. Pinguine sind Vögel. Also können Pinguine fliegen.

ist offenbar falsch. Man könnte sagen, dass der umgangssprachliche Satz logisch nicht belastbar ist und für die Mathematik deshalb ungeeignet.

Horst Köhler ist Bundespräsident bedeutet nicht HK = BP (wenn man das Gleichheitszeichen so gebraucht wie die Mathematik es erfordert), man kann ja nicht zum Beispiel in allen Gesetzestexten BP durch HK ersetzen, ohne deren Sinn zu entstellen („die Bundesversammlung wählt HK"). In der Mathematik wird Gleichheit so ernst genommen, dass man in Aussagen Ersetzungen vornehmen kann, ohne den Wahrheitsgehalt zu ändern. Aber selbst in anscheinend mathematischen Kontexten ist Vorsicht geboten:

Philipp, mein fast vierjähriger Sohn, weiß, dass 1+1 = 2. Es gilt $1 = \sin(\pi/2)$*. Aber Philipp weiß nicht, dass* $1 + \sin(\pi/2) = 2$.

Man muss also vorsichtig auswählen, welche Aussagetypen man für das Ersetzungsprinzip und damit für die Mathematik zulässt.

Wir werden im Laufe der Vorlesung viele neue Begriffe *definieren*, ohne zu sagen, was eine Definition letztlich ist. Folgendes Beispiel zeigt, dass hier tatsächlich ein Problem besteht (die Grelling-Nelson-Antinomie): Ein Adjektiv heiße autologisch, wenn es auf sich selbst zutrifft (wie z. B. dreisilbig), und heterologisch, wenn nicht (z. B. einsilbig). Das Adjektiv *heterologisch* kann dann weder auto- noch heterologisch sein. Das Problem ist hier, dass nicht schon alle Adjektive gegeben sind und in zwei Klassen eingeteilt werden, sondern dass die Definition auch auf sich selbst angewendet werden müsste.

Ein letztes Beispiel für die Verwirrung, die die Umgangssprache stiften kann, sind die bestimmten Artikel. Einfach dadurch, dass einem Nomen ein bestimmter Artikel vorangestellt wird, wird suggeriert, es gäbe ein solches Ding. Leider ist Papier geduldig und kann sich nicht gegen die grammatisch korrekten Ausdrücke *die größte Primzahl* oder *die Menge aller Mengen* wehren.

Wir werden Mathematik weitgehend umgangssprachlich formulieren. Was uns die angedeuteten Missstände lehren können, ist, dass wir vorsichtig und redlich mit mathematischen Begriffen umgehen müssen.

1.3 Mathematische Sprache. Um die umgangssprachlichen Fallen zu umgehen, müssen wir viele Begriffe (insbesondere *alle*, *es gibt*, *gleich*, *impliziert*) in einer sehr *pedantischen* Weise benutzen, insbesondere so, dass die Bedeutung nicht vom Kontext abhängt (in der Umgangssprache kann zum Beispiel *oder* sowohl ein- als auch ausschließlich gemeint sein, bei uns jedoch stets einschließlich). Gelegentlich benutzt man stenographische Zeichen:

- $\exists$ anstatt *es gibt* (Existenzquantor)
- $\forall$ anstatt *für alle* oder *jedes* (Allquantor)
- $\Rightarrow$ anstatt wenn..., dann... (Implikation)
- $\Leftrightarrow$ anstatt *genau dann, wenn* (Äquivalenz)
- $\neg$ anstatt *gilt nicht* (Negation), gelegentlich streicht man ein Symbol auch durch, um die Negation zu bezeichnen (etwa $x \neq y$)
- Das Komma bedeutet oft *und*.

Der Gebrauch dieser Kurzschrift ist nicht das Wesentliche der Mathematik, schafft aber wegen der Kürze oft eine Übersicht, die umgangssprachlich nicht so leicht zu erzielen ist. Wir werden die Bedeutung der Zeichen nicht weiter erklären, sondern benutzen sie so wie im Alltag. Um sich die Bedeutung der logischen Zeichen zu verdeutlichen (und auch in der mathematischen Praxis), ist es oft nützlich, zu überlegen, was die Negation einer Aussage bedeutet. Zum Beispiel ist *Alle Gespenster können fliegen* wahr, weil die Negation *Es gibt ein Gespenst, das nicht fliegen kann* falsch ist (da es überhaupt Gespenster nicht gibt). Die Negation von $A \Rightarrow B$ ist A *und* $\neg B$ – in der Umgangssprache sagt man dann *aber*, wobei der Unterschied zum *und* nicht logischer sondern psychologischer Natur ist. Man beachte, dass die Negation von $\neg B \Rightarrow \neg A$ ebenfalls A *und* $\neg B$ ist, weshalb $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ gleichwertige Aussagen sind, das heißt, die eine ist genau dann wahr, wenn es die andere ist. In der Praxis nennt man dies *Kontraposition*.

1.4 Beweise. Mathematik hat nicht nur den *Anspruch*, lediglich wahre Aussagen zu produzieren, sondern auch ein *Kriterium* dafür, welche Aussagen wahr sind, nämlich die *bewiesenen*, die man dann *Sätze* oder *Theoreme* oder gelegentlich auch *Propositionen* oder *Lemmata* nennt. Ein Beweis ist die logische Deduktion der Konklusion aus der Hypothese unter Benutzung von anerkannten Schlussregeln, Axiomen und schon bewiesenen Aussagen. Was das genau bedeutet, werden wir im Laufe der Vorlesung sehen. Man sollte aber stets auch die *Funktion* von Beweisen im Auge behalten: Es geht darum, ein Gegenüber (also Zuhörer oder Leser) von der Wahrheit einer Aussage auf redliche Weise zu *überzeugen* (nämlich durch Argumente, von denen man selbst überzeugt ist). Wie überzeugend ein Beweis ist, hängt dabei natürlich auch vom Gegenüber ab. Hier ein erstes Beispiel:

1.5 Satz.
Für jeden Bruch $q = n/m$ aus natürlichen Zahlen n und m gilt $q^2 \neq 2$.

Beweis. Durch Kürzen des Bruchs können wir erreichen, dass n und m nicht beide gerade sind. Wir nehmen nun $q^2 = 2$ an (und wollen daraus einen Widerspruch herleiten). Dann ist $n^2 = 2m^2$ gerade und daher auch n gerade, weil das Quadrat einer ungeraden Zahl ungerade ist. Also ist n^2 durch 4 teilbar, so dass $m^2 = n^2/2$ gerade ist. Also sind sowohl m als auch n gerade. Dies widerspricht der Tatsache, dass n und m nicht beide gerade sind. $\square$

1.6 Bemerkungen zu diesem Beweis

(a) Das Symbol $\square$ bedeutet, dass der Beweis zu Ende ist, oder genauer: Der Autor hält nun seine Argumente für hinreichend überzeugend. Das früher übliche *q.e.d.* wird nicht mehr benutzt.

(b) Am Anfang des Beweises haben wir eine *Reduktion* vorgenommen, nämlich auf eine einfachere, später nützliche Situation. Dabei haben wir offenbar schon einiges über die Bruchrechnung benutzt – der Beweis ist also *relativ* zu diesen Kenntnissen: Nur ein Leser, der kürzen kann, wird überzeugt werden können.

Solche Reduktionen kommen in Beweisen sehr oft vor, und es gibt verschiedene Sprechweisen wie *Es reicht, den Fall zu beweisen, dass...*, *Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei...*, oder kürzer *o.B.d.A. sei...*. Der Imperativ *sei* in dieser Formulierung ist linguistisch und logisch sehr fragwürdig – es ist zum Beispiel gar nicht klar, an wen er sich richtet. Trotzdem beginnt der Beweis eines Satzes über alle natürlichen Zahlen oft mit *Sei* $n \in \mathbb{N}$. Gemeint ist damit so etwas wie *Für jede natürliche Zahl gilt, sofern wir sie n nennen, dass...*.

(c) Das Verfahren im Beweis zu 1.5 nennt man einen *Widerspruchsbeweis*, das heißt, um die Wahrheit einer Aussage zu begründen, deduziert man aus der Negation einen Widerspruch. Dies ist dasselbe wie die 1.3 angesprochene Kontraposition und oft einen Versuch wert, wenn man keine Idee für einen direkten Beweis hat.

(d) Wir haben den Beweis umgangssprachlich formuliert und insbesondere auf Implikationspfeile $\Rightarrow$ verzichtet. Falls man doch dieses logische Symbol benutzt, ist darauf zu achten, dass in einem mathematischen Beweis mit $A \Rightarrow B$ nicht bloß die sogenannte *materiale Implikation* gemeint ist ($A \Rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn B *oder* $\neg A$ wahr ist), sondern dass man gute Gründe dafür hat, B aus A zu folgern.

Es wäre an dieser Stelle noch so manches über mathematische Logik zu sagen, aber das ist nicht unser eigentliches Thema, und es ist sehr wahrscheinlich, dass ein weiteres Eingehen darauf für den angehenden Mathematiker etwa so hilfreich wäre, wie eine Vorlesung über Akustik für jemanden, der Geige spielen lernen will. Oder wie Wittgenstein schreibt: *Die Kinder müssten, um das Rechnen der Volksschule zu verstehen, bedeutende Philosophen sein, in Ermangelung dessen brauchen sie Übung.*

KAPITEL 2

Mengen und Abbildungen

2.1 Mengen

(a) So wie in der Geometrie von Euklid die grundlegenden Begriffe *Punkt* und *Gerade* nicht explizit definiert sondern nur implizit durch Regeln beschrieben werden, versuchen wir uns auch nicht an einer Definition von *Elementen* und *Mengen*. Einen Ausdruck

$$x \in M$$

lesen und interpretieren wir so, dass M eine Menge ist und x ein Element von M. Gelegentlich sagt man auch, dass M das Element x enthält, und schreibt $M \ni x$.

(b) Natürlich haben wir eine Vorstellung davon, was eine Menge ist. Der Begründer der Mengenlehre, Georg Cantor, schreibt:

> Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Dies ist eine gute Beschreibung dessen, was man sich vorstellen sollte, taugt aber nur sehr bedingt als Definition. Erstens kann man einwenden, dass bloß ein undefinierter Begriff (Menge) durch einen anderen (Zusammenfassung) ersetzt wird. Gravierender ist aber, dass nicht näher bestimmt ist, was für *Objekte* zugelassen sind. Anscheinend alles, was man sich so denken kann – und das ist zu viel, wie die folgende berühmte *Russelsche Antinomie* zeigt:

(c) *Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.* Dann gilt $M \in M$ genau dann, wenn $M \notin M$: Ist nämlich $M \in M$, so muss M die Bedingung für die Zugehörigkeit zu M erfüllen, nämlich sich nicht selbst als Element zu enthalten, also folgt $M \notin M$. Ist andererseits $M \notin M$, so erfüllt M die Bedingung zur Zugehörigkeit, und es folgt $M \in M$.

(d) Ein Ausweg aus der Russelschen Antinomie besteht darin, sehr genau die Regeln zu beschreiben, wie man mit $x \in M$ umgehen darf. DAS MACHEN WIR HIER NICHT, weil diese *axiomatische Mengenlehre* fürchterlich kompliziert ist und für Neumathematiker verwirrend sein dürfte. Stattdessen vertrauen wir darauf, dass die Operationen, die wir gleich für Mengen einführen, nicht zu Widersprüchen führen. Trotzdem wollen wir darauf hinweisen, dass eines der Probleme bei der Russelschen Antinomie die Benutzung des bestimmten Artikels ist. Liest man $x \in M$ als *das Buch x wird im Katalog M aufgeführt*, so stellt man wie eben fest, dass man gar keinen *Superkatalog* erstellen kann, der genau die Kataloge aufführt, die sich nicht selbst aufführen. Hier ist also nichts, was man mit *der Katalog mit...* bezeichnen könnte – und nirgends ist ein Widerspruch.

(e) Für zwei Mengen M und N schreiben wir $M \subseteq N$ und nennen M eine *Teilmenge* von N, falls jedes Element von M auch Element von N ist, also $x \in M \Rightarrow x \in N$. Gelegentlich sagt man dann auch M *ist in* N *enthalten* oder N *umfasst* M oder N ist *Obermenge* von M, und man schreibt dann auch $N \supseteq M$.

(f) Zwei Mengen M und N heißen gleich und wir schreiben dann $M = N$, wenn sie dieselben Elemente haben, also falls $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.

(g) Wir haben nichts über die Art *mathematischer Objekte* als potentielle Elemente gesagt und werden uns darüber auch nicht auslassen. Auf jeden Fall soll aber aus $x = y$ und $x \in M$ stets $y \in M$ folgen, das heißt, es kommt nicht auf die Art der Beschreibung von x an. Dies scheint offensichtlich zu sein, ist aber eines der Probleme der *autologischen Adjektive* aus 1.2.

2.2 Beschreibung von Mengen

(a) Eine sehr spezielle Menge ist die *leere Menge* $\emptyset$, die gar kein Element enthält. Für die ist also die Aussage $x \in \emptyset$ immer falsch.

(b) Eine oft benutzte Darstellung ist die *aufzählende Beschreibung* von Mengen. Dies geschieht in der Form

$$\{\text{Liste der Elemente}\}$$

Zum Beispiel ist $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ die Menge der fünf ersten natürlichen Zahlen. Hierbei kommt es auf die Reihenfolge nicht an, und es ist auch nicht ausgeschlossen, dass ein Element mehrfach aufgeführt wird.

(c) Oft wird statt der vollständigen Liste eine *Hinweisdefinition* mit Hilfe von ... gegeben, wenn klar ist, wie die Pünktchen aufgefüllt werden müssen. Zum Beispiel schreibt man

$$\{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$$

für die Menge der ersten zwanzig natürlichen Zahlen. Weil es zu jeder Zahlenfolge eine Regel gibt, die genau diese Folge beschreibt, ist die Benutzung von ... gefährlich und sollte weitestgehend vermieden werden.

(d) Oft wird aus einer gegebenen Menge M eine Teilmenge *ausgesondert*. Ist E eine Eigenschaft, die Elemente von M haben können, so schreibt man für die Menge der Elemente von M, die die Eigenschaft tatsächlich haben:

$$\{x \in M : x \text{ hat } E\}.$$

Unter Vorgriff auf die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wäre etwa $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ die Menge der positiven reellen Zahlen.

(e) Manche Mengen werden mit einem exklusiven Symbol bezeichnet (wodurch sie natürlich noch nicht definiert sind, was wir später nachholen werden):

- $\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$
- $\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen $\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- $\mathbb{N}_0$ Menge der positiven ganzen Zahlen $0, 1, 2, \dots$
- $\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{C}$ Menge der komplexeren Zahlen.

2.3 Operationen für Mengen Aus zwei oder mehreren Mengen kann man durch folgende Konstruktionen neue gewinnen. Seien M und N Mengen.

(a) Der *Durchschnitt* $M \cap N$ ist die Menge aller Objekte, die sowohl Element von M als auch von N sind, also $M \cap N = \{x \in M : x \in N\}$. Falls $M \cap N = \emptyset$, heißen M und N *disjunkt*.

(b) Die *Vereinigung* $M \cup N$ ist die Menge aller Objekte, die Element von M oder Element von N sind (wobei, wie gesagt, das *oder* einschließlich gemeint ist).

(c) Offenbar ist $M \cap N$ die größte Menge, die sowohl in M als auch in N enthalten ist. Genauer heißt das: Ist K eine Menge mit $K \subseteq M$ und $K \subseteq N$, so gilt $K \subseteq M \cap N$. Analog ist $M \cup N$ die kleinste Menge, die sowohl M als auch N umfasst.

(d) Die *Differenz* $M \setminus N = \{x \in M : x \notin N\}$ liest man M *ohne* N. Ist $N \subseteq M$, so nennt man die Differenz auch das *Komplement* von N in M. Falls M durch den Kontext zweifelsfrei bestimmt ist, schreibt man auch $N^c = M \setminus N$. Dies ist aber gefährlich, weil in der Notation N^c die Menge M nicht vorkommt, obwohl die Menge N^c vom M abhängt.

(e) Für zwei Objekte x und y definieren wir das (geordnete) *Paar* (x, y) *mit den Komponenten x und y* durch die Forderung, dass zwei Paare genau dann gleich sind, wenn die jeweiligen Komponenten gleich sind, also

$$(x, y) = (a, b) \Longleftrightarrow x = a \text{ und } y = b.^*$$

Das *(kartesische) Produkt* $M \times N$ von M und N ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $X \in M$ und $y \in N$.

(f) Es gelten eine Reihe Regeln für diese Operationen, die alle sehr leicht zu beweisen sind:

(1) $M \cap N = N \cap M$ und $M \cup N = N \cup M$ (Kommutativität)
(2) $M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap P$ und gleiches für $\cup$ (Assoziativität)
(3) $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$
(4) $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$ (Distributivgesetze)
(5) $M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$
(6) $M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P)$ (Regeln von de Morgan)
(7) $(M \times N) \cap (A \times B) = (M \cap A) \times (N \cap B)$

Vorsicht ist allerdings bei der Vereinigung kartesischer Produkte geboten. Das kartesische Produkt der Vereinigungen ist oft sehr viel größer als die Vereinigung der kartesischen Produkte.

Beweis. Beweis des zweiten Distributivgesetzes:
Wir zeigen zuerst $M \cup (N \cap P) \subseteq (M \cup N) \cap (M \cup P)$. Sei dazu $x \in M \cup (N \cap P)$.
1. Fall: $x \in M$. Dann ist $x \in M \cup N$ und $x \in M \cup P$, also auch $x \in (M \cup N) \cap (M \cup P)$.
2. Fall: $x \in N \cap P$. Dann ist $x \in M \cup N$ und $x \in M \cup P$, also wieder $x \in (M \cup N) \cap (M \cup P)$.
Für die umgekehrte Inklusion sei $x \in (M \cup N) \cap (M \cup P)$.
1. Fall: $x \in M$. Dann ist natürlich $x \in M \cup (N \cap P)$.
2. Fall: $x \notin M$. Wegen $x \in M \cup N$ ist dann $x \in N$, und aus gleichem Grund ist $x \in P$. Also ist $x \in M \cup (N \cap P)$. □

*Eine Möglichkeit diese *implizite* Definition zu vermeiden, ist eine explizite Definition $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Dieser Vorschlag stammt von Kuratowski, aber wir verzichten auf den Beweis, dass er das Gewünschte liefert.

2.4 Mengensysteme

(a) Eine Menge $\mathfrak{M}$, deren sämtliche Elemente selbst Mengen sind heißt ein *Mengensystem*. Beispiele sind $\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ oder $(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\}$ im Kuratowskis Definition des geordneten Paares. Man kann sogar Mathematik so machen, dass jedes mathematische Objekt eine Menge ist – dann wären Menge und System synonyme Begriffe.

(b) Ein wichtiges Beispiel ist die *Potenzmenge* $\mathscr{P}(M)$ einer Menge M, deren Elemente alle Teilmengen von M sind. Zum Beispiel ist

$$\mathscr{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

und $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ – diese Menge ist also nicht leer.

(c) Ist $\mathfrak{M}$ ein Mengensystem, so ist die *Vereinigung* $\bigcup \mathfrak{M}$ die Menge aller Objekte, die Element eines $M \in \mathfrak{M}$ sind, also

$$\bigcup \mathfrak{M} = \{x : \text{ es gibt } M \in \mathfrak{M} \text{ mit } x \in M\}.$$

Ist $\mathfrak{M}$ nicht leer, so ist der *Durchschnitt*

$$\bigcap \mathfrak{M} = \{x : \text{ für alle } M \in \mathfrak{M} \text{ gilt } x \in M\}.$$

(d) Ist $\mathfrak{M} = \{A, B\}$, so erhalten wir $\bigcup \mathfrak{M} = A \cup B$ und $\bigcap \mathfrak{M} = A \cap B$.

(e) Ist $\mathfrak{M}$ von der Form $\{A_i : i \in I\}$, wobei I eine sogenannte *Indexmenge* ist und A_i für jedes $i \in I$ eine Menge, so schreibt man

$$\bigcup \{A_i : i \in I\} = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ und } \bigcap \{A_i : i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i$$

Was genau es mit der Zuordnung $i \rightsquigarrow A_i$ auf sich hat, führen wir im Punkt 2.6 ein. Wichtig ist, dass die Vereinigung nicht von der konkreten Beschreibung des Systems abhängt, insbesondere gilt

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{x \in I} A_x = \bigcup_{\heartsuit \in I} A_\heartsuit$$

2.5 Relationen Seien X, Y zwei Mengen.

(a) Jede Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ heißt eine *Relation* von X nach Y. Falls $(x,y) \in R$ sagt man, dass x in der Relation R zu y steht. Auch wenn X und Y durch die Menge R nicht eindeutig festgelegt sind, betrachten wir sie als Daten, die zur Definition der Relation gehören.

Für ein nichtmathematisches Beispiel denke man etwa an $X = Y =$ Menge aller Menschen und $R = \{(x,y) \in X \times Y : x \text{ ist Kind von } y\}$.

(b) Für jedes $x \in X$ ist dann der *Schnitt in x*

$$R[x] = \{y \in Y : (x,y) \in R\}$$

die Menge der in Relation zu x stehenden Elemente von Y, in obigem Beispiel also die Menge der Eltern von x.

Offenbar ist die Relation durch die Angabe aller Schnitte $R[x]$ eindeutig bestimmt (weil $(x,y) \in R \Leftrightarrow y \in R[x]$).

(c) Relationen bringen eine gewisse Dynamik in die Mengenlehre, wenn man sich vorstellt, dass die Relation jedem x den Schnitt $R[x]$ *zuordnet*.

2.6 Abbildungen

(a) Eine Relation f von X nach Y heißt *Abbildung* oder *Funktion* von X nach Y, falls alle Schnitte $f[x]$ einelementig sind. Anders ausgedrückt: Für jedes $x \in X$ gibt es genau ein $y \in Y$, das in Relation f zu x steht.

Dieses eine Element von $f[x]$ wird dann f *von* x genannt und sehr oft mit $f(x)$ bezeichnet. Man schreibt dann

$$f : X \to Y, x \mapsto f(x) \text{ oder auch nur } f : X \to Y.$$

(b) Die Schreibweise ist insbesondere dann sehr nützlich, wenn $f(x)$ durch eine Formel gegeben ist, zum Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x+1)^2$. In der Schulmathematik werden die Begriffe Formel und Funktion mehr oder weniger synonym benutzt, was in unserer Mathematik in die Irre führt. Vielmehr stelle man sich unter einer Funktion so etwas wie eine *Maschine* (oder ein Orakel) vor, die für jeden Input $x \in X$ einen Output $f(x) \in Y$ produziert. Wie diese *Transformation* passiert, ist irrelevant.

(c) Eine Funktion ist nach unserer Definition eine Teilmenge von $X \times Y$ mit gewissen Eigenschaften. In der älteren mathematischen Literatur hingegen wird oft die *Zuordnungsvorschrift* $x \mapsto f(x)$ Funktion genannt. Die Menge

$$\{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

heißt dann *Graph* der Funktion. Bei uns ist also der Graph dasselbe wie die Funktion.

(d) Für eine Funktion f von X nach Y nennt man X auch *Definitionsbereich* oder *Quelle* von f und Y *Wertebereich* oder *Ziel* von f. Ein Element $x \in X$ heißt dann auch ein *Argument* für f und $f(x)$ heißt *Wert* von x unter f.

(e) Auch wenn es aus der Definition folgt, lohnt es sich anzumerken, dass zwei Abbildungen f von X nach Y und g von $\tilde{X} \to \tilde{Y}$ genau dann gleich sind (man schreibt dann $f = g$), wenn

$$X = \tilde{X}, Y = \tilde{Y} \text{ und } f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in \tilde{X}.$$

Insbesondere sind zwei Abbildungen mit verschiedenen Zielen verschieden.

(f) Zwei sehr einfache Beispiele: Für ein festes Element $c \in Y$ heißt

$$f : X \to Y, x \mapsto c.$$

(also $f = \{(x, y) \in X \times Y : y = c\}$) die *konstante Abbildung* von X nach Y mit Wert c.

Die Abbildung $id_X : X \to X, x \mapsto x$ heißt *Identität auf* X (hier ist also $id_X = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$).

(g) Die Bezeichnung $f(x)$ für den Wert des Arguments x ist üblich, solange man allgemeine Theorie betreibt. In der Praxis wird der Wert unter konkreten Abbildungen aber oft auch anders bezeichnet, zum Beispiel $f_x = f(x)$ und man nennt das Argument dann auch *Index* und den Definitionsbereich die *Indexmenge*. Ist der Definitionsbereich ein Produkt $A \times B$, so schreibt man $f(a, b) = f((a, b))$ – man beachte, dass die Klammern hier zwei verschiedene Bedeutungen haben: Das innere Klammerpaar bedeutet das geordnete Paar und das äußere, dass $x = (a, b)$ als Argument in f eingesetzt wird.

In dieser Situation schreibt man auch afb, was Ihnen womöglich komisch vorkommt, Sie aber selbst schon oft getan haben: Das Bilden der Summe natürlicher Zahlen ist eine Abbildung $+$ von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, und jedes Kind schreibt $n + m$ anstatt $+((n, m))$.

(h) Wir haben Funktionen als spezielle Relationen definiert. Jetzt können wir auch jede Relation R von X nach Y als eine Funktion von X nach $\mathscr{P}(Y)$ auffassen, nämlich $f : X \to \mathscr{P}(Y), x \mapsto R[x]$.

2.7 Operationen für Abbildungen.

(a) Seien $f : X \to Y$ und $g : \tilde{Y} \to Z$ zwei Abbildungen mit $Y \subseteq \tilde{Y}$. Dann heißt die Abbildung

$$g \circ f : X \to Z,\ x \mapsto g(f(x))$$

die *Komposition* von g und f. Gelegentlich nennt man dies g *nach* f oder auch g *von* f und schreibt $g(f) = g \circ f$.

ACHTUNG: Die Komposition g nach f ist nur dann definiert, wenn das Ziel von f in der Quelle von g enthalten ist!

(b) Als Relation ist $g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z$: es gibt $y \in Y$ mit $(y, z) \in g$ und $(x, y) \in f\}$, und das kann man für beliebige Relationen so definieren.

(c) Für $A \subseteq X$ heißt $i_{A,X} : A \to X,\ a \mapsto a$ die *Inklusion* von A nach X. Dann nennt man $f \circ i_{A,X} : A \to Y,\ a \mapsto f(a)$ auch *Restriktion* von f auf A und schreibt $f|_A = f \circ i_{A,X}$.

(d) Für zwei Funktionen $f : X \to Y$ und $g : X \to Z$ mit gleicher Quelle heißt

$$f \times g : X \to Y \times Z,\ x \mapsto (f(x), g(x))$$

kartesisches Produkt von f und g.

(e) Ist dann $h : Y \times Z \to W$ eine weitere Abbildung, so haben wir die Komposition $h \circ (f \times g) : X \to W, x \mapsto h((f(x), g(x))$. In dieser Situation schreibt man fast immer $h(f, g)$ oder speziell zum Beispiel für $h = +$ auch $f + g$. Zur Verdeutlichung sagt man gelegentlich, dass $h(f, g)$ *argumentweise* erklärt ist (nämlich durch $x \mapsto h(f(x), g(x))$.

2.8 Bilder und Urbilder Im Folgenden sei R eine Relation von X nach Y.

(a) Für $A \subseteq X$ mit $B \subseteq Y$ heißen

$R(A) = \{y \in Y :$ es gibt $x \in A$ mit $(x, y) \in R\}$ das *Bild von A unter R und*

$R^{-1}(B) = \{x \in X :$ es gibt $y \in B$ mit $(x, y) \in R\}$ das *Urbild von B unter R.*

Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so schreibt man oft $\{f(x) : x \in A\}$ statt $f(A)$.

Ist als halb-mathematisches Beispiel X die Menge aller Menschen, Y die Menge aller Bücher und $(x, y) \in R$ die Relation, dass x das Buch y gelesen hat, so sind $R(A)$ die Menge der Bücher, die mindestens eine Person $x \in A$ gelesen hat, und $R^{-1}(B)$ ist die Menge der Personen, die mindestens eines der Bücher $y \in B$ gelesen haben.

(b) Durch $R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$ ist die *Umkehrrelation* R definiert. Dann ist das Bild von $B \subseteq Y$ unter R^{-1} gleich dem Urbild von B unter R, so dass nichts gegen die Verwendung des selben Symbols spricht.

(c)

WARNUNG: Die Umkehrrelation einer Funktion ist sehr oft keine Funktion!

Die Umkehrrelation der konstanten Funktion $f : X \to Y, x \mapsto c$ ist nämlich $f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : y = c\}$ und dann ist $f^{-1}[c] = X$ und $f^{-1}[y] = \emptyset$ für alle $y \neq c$. Falls also nicht X und Y beide bloß einelementig sind, ist f^{-1} keine Funktion.

(d) Die Relation R von X nach Y heißt *injektiv*, falls für alle $x, \tilde{x} \in X$ und $y \in Y$ mit $(x, y) \in R$ und $(\tilde{x}, y) \in R$ stets $x = \tilde{x}$ gilt. Speziell für Funktionen bedeutet dies, dass verschiedene Argumente stets verschiedene Werte haben.

Die Relation heißt *surjektiv*, falls jedes $y \in Y$ in einem Schnitt $R[x]$ liegt, das heißt, dass es $x \in X$ mit $(x, y) \in R$ gibt.

Die Umkehrrelation von R ist genau dann eine Funktion, wenn R injektiv und surjektiv ist.

BEWEIS. Ist $R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$ eine Funktion, so ist $R^{-1}[y] = \{x \in X : (x, y) \in R\}$ für jedes $y \in Y$ einelementig, so dass es genau ein $x \in X$ mit $(x, y) \in R$ gibt. Also is R injektiv und surjektiv. Ist dies andererseits der Fall, so ist $R^{-1}[y]$ für jedes $y \in Y$ einelementig, also ist R^{-1} eine Funktion. □

(e) Wir werden die Begriffe injektiv und surjektiv fast ausschließlich für Funktionen $f : X \to Y$ benutzen. Die Funktion heißt *bijektiv* oder eine *Bijektion*, falls sie injektiv und surjektiv ist. Genau in diesem Fall ist also f^{-1} eine Funktion, die dann *Umkehrfunktion* heißt und jedem $y \in Y$ genau dasjenige Element $x \in X$ zuordnet, das $f(x) = y$ erfüllt. Es gilt also

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

Die Umkehrfunktion ist wiederum bijektiv.

(f) Es ist zu beachten, dass Injektivität und Surjektivität nicht bloß von der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto f(x)$ abhängen sondern erheblich auch Quelle und Ziel. Unter Vorgriff auf die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}_+$ der reellen beziehungsweise positiven reellen Zahlen verdeutlicht man sich das leicht mit folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} f :&\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto x^2 \\ g :&\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, &\quad x \mapsto x^2 \\ h :&\quad \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, &\quad x \mapsto x^2 \\ i :&\quad \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

Dieselbe Formel $x \mapsto x^2$ liefert hier alle möglichen Kombinationen.

(g) Sind $f : X \to Y$ und $g : \tilde{Y} \to Z$ mit $Y \subseteq \tilde{Y}$ beide injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv. Sind f und g beide surjektiv und $Y = \tilde{Y}$, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

2.9 Natürliche Zahlen. Die Menge der natürlichen Zahlen ist

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Daran hat man sich von Kind an gewöhnt, und die wenigsten Menschen werden ein Problem mit den Pünktchen haben. Trotzdem einige Bemerkungen, wie man $\mathbb{N}$ genauer fassen kann (ohne auf die Details einzugehen, die Konstruktion hier stammt von J. von Neumann).

(a) Man kann eine Zahl stets als Anzahl der Elemente einer Menge auffassen, und daher ist die Definition $0 = \emptyset$ sinnvoll (eben weil $\emptyset$ null Elemente hat). Als Eins definiert man nun eine Menge mit genau einem Element, also zum Beispiel $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$, und als Zwei eine Menge mit zwei Elementen $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 1 \cup \{1\}$. So will man nun fortfahren, aber ein schlichtes *und so weiter* ist unbefriedigend. In Analogie zu $2 = 1 \cup \{1\}$ betrachtet man für eine beliebige Menge den *Nachfolger* $A \cup \{A\}$. Wir würden gerne eine Nachfolger-*Abbildung* definieren – aber dazu fehlt uns noch ein Definitionsbereich! Das *Unendlichkeitsaxiom* der Mengenlehre besagt, dass es einen geeigneten Definitionsbereich gibt, also

Es gibt ein System S mit $\emptyset \in S$ und $A \cup \{A\} \in S$ für alle $A \in S$.

Dann ist $\varphi : S \to S, A \mapsto A \cup \{A\}$ tatsächlich eine Abbildung. Eine Teilmenge M von S heißt *induktiv*, falls $\varphi(A) \in M$ für alle $A \in M$. Insbesondere ist S selbst induktiv und daher ist $\mathfrak{M} = \{M \subseteq S : M \text{ induktiv und } \emptyset \in M\}$ ein *nicht-leeres* Mengensystem. Dessen Durchschnitt $\mathbb{N}_0$ ist die kleinste induktive Menge, die $0 = \emptyset$ enthält. Man kann nun zeigen, dass jedes Element von $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ genau einen Vorgänger hat, und somit $\mathbb{N}$ genau der kindlichen Vorstellung der natürlichen Zahlen entspricht. Außerdem kann man Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}$ so definieren, dass die Rechenregeln der Grundschule erfüllt sind, wobei insbesondere $n + 1 = \varphi(n)$. Dann haben wir auch die Ordnung in $\mathbb{N}_0$, also $n \leq m$, falls es $k \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $m = n + k$.

(b) Folgendes *Induktionsprinzip* war der zentrale Punkt in der oben angedeuteten Definition von $\mathbb{N}_0$:

Seien $M \subseteq \mathbb{N}_0$ und $k \in M$, so dass für alle $n \geq k$ gilt: $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$. Dann ist $n \in M$ für alle $n \geq k$.

In konkreten Fällen muss man also zwei Dinge zeigen: Den *Induktionsanfang* $k \in M$ und den *Induktionsschritt* $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$.

(c) Hier ein Beispiel, dass C.F. Gauß schon als Schuljunge gekonnt hat:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Wir betrachten die Menge M derjenigen $n \in \mathbb{N}$, für die die Formel wahr ist. * Dann gilt $1 \in M$, weil auf der linken Seite nur der eine Summand 1 steht und auf der rechten $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Sei nun $n \in M$, das heißt die Formel stimmt für n. Wir müssen die Formel für $n+1$ zeigen. Die Summe der ersten $n+1$ Zahlen ist aber $n+1$ plus die Summe der ersten n, also gleich

$$n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\big(1 + \frac{n}{2}\big) = (n+1)\big(\frac{2+n}{2}\big) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}.$$

□

(d) Wir haben in (c) bereits die Multiplikation in $\mathbb{N}_0$ und sogar eine Division benutzt, und wir gehen in der Tat davon aus, dass die Bruchrechnung bekannt ist (unten werden wir zwar eine Definition in $\mathbb{Q}$ angeben, die aber nicht die Routine ersetzt, die man bei der Bruchrechnung haben sollte).

(e) Das Induktionsprinzip impliziert, dass $\mathbb{N}_0$ *wohlgeordnet* ist:

Jede nicht-leere Teilmenge A von $\mathbb{N}_0$ hat ein kleinstes Element.

Dieses kleinste Element heißt *Minimum von* A und wird mit $\min A$ bezeichnet. Den Beweis lassen wir als Übungsaufgabe (hat A kein kleinstes Element, so zeige man, dass $M = \mathbb{N}_0 \setminus A$ induktiv ist).

2.10 Endliche Mengen. Auch wenn in der in 2.9 (a) angedeuteten Konstruktion die natürlichen Zahlen Mengen sind, wollen wir im Folgenden auch die Vorstellung zulassen, dass $1, 2, 3, \ldots$ andersartige Objekte sind, und deshalb betrachten wir als typische n-elementige

*Wem diese Definition von M zu vage ist, der definiere zwei Funktionen $\ell, r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch die linke beziehungsweise rechte Seite der behaupteten Gleichheit und setze $M = \{n \in \mathbb{N} : \ell(n) = r(n)\}$.

Menge nicht n selbst sondern $\{1,\ldots,n\}$ (obwohl das wegen der ... einen Rückschritt an Präzision bedeutet). Für $n=0$ ist $\{1,\ldots,0\}=\emptyset$.

(a) Eine Menge M heißt *endlich*, wenn es $n\in\mathbb{N}_0$ und eine injektive Abbildung $f: M\to\{1,\ldots,n\}$ gibt. Dann heißt

$$|M| = \min\{n\in\mathbb{N}_0 : \text{ es gibt Injektion } M\to\{1,\ldots,n\}\}$$

die *Anzahl der Elemente* von M oder *Kardinalität* von M.

(b) Wir haben hier tatsächlich Endlichkeit und Kardinalität definiert ohne einen naiven Begriff davon zu benutzen. Ist M nicht endlich, so schreiben wir $|M|=\infty$. Die folgenden Aussagen sind sehr plausibel. Wir überlassen die (gar nicht so einfachen) Beweise dem interessierten Leser als Übung.

(Die Beweise dürfen natürlich nur die Definition der Kardinalität und keinen intuitiven Begriff der Anzahl benutzen. Ein typisches Problem ist dann $|\{1,\ldots,n\}|=n$ zu zeigen, das heißt insbesondere, dass es keine Injektion von $\{1,\ldots,n\}$ nach $\{1,\ldots,n-1\}$ geben kann.)

(c) Seien A, B Mengen und $m\in\mathbb{N}_0$.

(1) $|A|=m \Leftrightarrow$ Es gibt eine Bijektion $A\to\{1,\ldots,m\}$
(2) Falls es eine Bijektion $A\to B$ gibt, so gilt $|A|=|B|$, und falls eine der Mengen endlich ist, gilt auch die umgekehrte Implikation.
(3) Falls $A\cap B=\emptyset$, so ist $|A\cup B|=|A|+|B|$.

2.11 Kombinatorik. Kombinatorik ist die Lehre vom geschickten Zählen. Wir beschränken uns hier auf einige sehr einfache Probleme. Im folgenden seien stets M und N zwei endliche Mengen mit $|M|=m$ und $|N|=n$.

(a) $|M\times N| = |M||N|$.

Beweis. Ist $f: N\to\{1,\ldots,n\}$ eine Bijektion, so ist $M\times N\to M\times\{1,\ldots,n\}, (x,y)\mapsto (x,f(y))$ eine Bijektion, so dass es reicht, den Fall $N=\{1,\ldots,n\}$ zu zeigen, was wir durch Induktion tun. Für $n=0$ ist $M\times\emptyset=\emptyset$ und hat daher Kardinalität $0=m0$. Für den Induktionsschritt schreiben wir

$$M\times N = A\cup B \text{ mit } A = M\times\{1,\ldots,n-1\} \text{ und } B = M\times\{n\}.$$

Dann ist die Vereinigung disjunkt und mit der Induktionsvoraussetzung, 2.10(c3) und $|B|=|M|$ erhalten wir

$$|M\times N| = |A|+|B| = m(n-1)+m = mn.$$ □

(b) $|\{f: M\to N \text{ Abbildung}\}| = |N|^{|M|}$, wobei $n^0=1$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$.

Für diese *Menge aller Abbildungen* von M nach N schreibt man N^M, so dass $|N^M| = |N|^{|M|}$.

Beweis. Für $M=\emptyset$ gibt es genau eine Abbildung $M\to N$ (jede Relation von $\emptyset$ nach N ist $\emptyset\subseteq\emptyset\times N$, und diese leere Relation ist eine Abbildung). Ist $M\neq\emptyset$, so wählen wir ein Element $z\in M$ und betrachten die Abbildung

$$F: N^M \to N^{M\setminus\{z\}}\times N, f\mapsto (f|_{M\setminus\{z\}}, f(z))$$

Dann ist F eine Bijektion und wir erhalten mit (b) und Induktion

$$|N^M| = |N^{M\setminus\{z\}}||N| = n^{m-1}n = n^m. \qquad \square$$

(c) Für jede endliche Menge M gilt $|\mathscr{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis. Für $A \subseteq M$ heißt $I_A : M \to \{0,1\}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}$ *Indikatorfunktion* von A. Damit ist $F : \mathscr{P}(M) \to \{0,1\}^M$, $A \mapsto I_A$ eine Bijektion, und mit (b) folgt $|\mathscr{P}(M)| = |\{0,1\}^M| = 2^{|M|}$. $\square$

(d) Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die *Fakultät* $0! = 1$ und $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, so dass $n! = (n-1)!n$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ heißt $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ *Binomialkoeffizient* n über k, im Zähler des Bruchs stehen also k Faktoren. Außerdem setzen wir noch $\binom{n}{0} = 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Durch Erweitern des zweiten Ausdrucks mit k und Ausklammern erhält man sofort

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{(Pascalsches Dreieck)}.$$

(e) Für $\mathscr{P}_k(N) = \{A \in \mathscr{P}(N) : |A| = k\}$ gilt $|\mathscr{P}_k(N)| = \binom{n}{k}$.

Beweis. Für $n = 0$ und $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathscr{P}_k(\emptyset) = \emptyset$, und außerdem ist $\mathscr{P}_0(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Also stimmt die Aussage für $n = 0$. Für $N \neq \emptyset$ sei $z \in N$. Dann ist

$$\mathscr{P}_k(N) = \mathscr{P}_k(N \setminus \{z\}) \cup \{A \in \mathscr{P}_k(N) : z \in A\}$$

eine disjunkte Vereinigung, und weil $A \mapsto A \setminus \{z\}$ eine Bijektion zwischen der zweiten Menge und $\mathscr{P}_{k-1}(N \setminus \{z\})$ ist, folgt induktiv

$$|\mathscr{P}_k(N)| = |\mathscr{P}_k(N \setminus \{z\})| + |\mathscr{P}_{k-1}(N \setminus \{z\})| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}. \qquad \square$$

2.12 Satz.
Seien M und N zwei nicht-leere Mengen. Es gibt genau dann eine injektive Abbildung $f : M \to N$, wenn es eine surjektive Abbildung $g : N \to M$ gibt.

Beweis. Seien $f : M \to N$ injektiv und $a \in M$. Dann ist

$$g : N \to M,\ y \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } f(x) = y \\ a, & \text{falls } y \notin f(M) \end{cases}$$

eine surjektive Abbildung (weil $x = g(f(x))$ für jedes $x \in M$).

Sei andererseits $g : N \to M$ eine Surjektion. Für jedes $y \in M$ gibt es also ein $x \in N$ mit $g(x) = y$, und wir nennen nun *eines* dieser Elemente $f(y)$. Dann ist $f : M \to N, y \mapsto f(y)$ eine injektive Abbildung, weil für $y \neq \tilde{y}$ stets $g(f(y)) = y$ und $g(f(\tilde{y})) = \tilde{y}$ gilt, so dass $f(y)$ und $f(\tilde{y})$ verschieden sind. $\square$

Im zweiten Teil des Beweises haben wir *geschummelt*, weil wir nicht sagen können, *welches* der $x \in N$ mit $g(x) = y$ wir als Funktionswert $f(y)$ wählen. In einer axiomatischen Mengenlehre formuliert man das benutzte Argument (oder eine äquivalente Aussage) als *Auswahlaxiom*.

Ist allerdings $N = \mathbb{N}_0$, so kann man konstruktiv einen Funktionswert $f(y)$ angeben, nämlich $f(y) = \min\{x \in \mathbb{N}_0 : g(x) = y\}$. Dann braucht man also kein zusätzliches Axiom.

2.13 Abzählbarkeit

(a) Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn es eine Injektion $f : M \to \mathbb{N}$ gibt. Andernfalls heißt sie *überabzählbar*. Wegen 2.11 ist eine nicht-leere Menge M genau dann abzählbar, wenn es eine Surjektion $\mathbb{N} \to M$ gibt. Außerdem erhält man aus der Tatsache, dass Kompositionen injektiver (bzw. surjektiver) Abbildungen injektiv (bzw. surjektiv) sind, folgende *Stabilitätseigenschaften*:

(b) Seien M eine abzählbare Menge, $f : N \to M$ injektiv und $g : M \to K$ surjektiv. Dann sind N und K ebenfalls abzählbar.

(c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.

Beweis. Stellt man sich $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als Matrix vor, so sind sowohl Zeilen als auch Spalten unendlich lang, und man kann nicht einfach eine Zeile nach der anderen durchzählen. Der Trick ist, die Diagonalen $D_n = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : j + k = n + 1\}$ durchzuzählen. Offensichtlich ist $|D_n| = n$ und die D_n sind paarweise disjunkt mit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Die ersten n Mengen $D_1, \ldots, D_n$ haben zusammen $N(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ Elemente, und man benutzt dann die Zahlen $N(n) + 1, \ldots, N(n) + n + 1$, um D_{n+1} zu numerieren. Schreibt man $D_n = \{x_{n,1}, \ldots, x_{n,n}\}$, so ist also

$$f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n, k \mapsto x_{n+1,k} \text{ für } k = N(n) + \ell \text{ mit } \ell \in \{1, \ldots, n+1\}$$

eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. □

(d) Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar.

Genauer heißt das: Ist $\mathfrak{M}$ ein abzählbares Mengensystem, so dass jedes $M \in \mathfrak{M}$ eine abzählbare Menge ist, so ist $\bigcup \mathfrak{M}$ abzählbar.

Beweis. Wir können $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathfrak{M}$ annehmen. Wegen Satz 2.11 gibt es $F : \mathbb{N} \to \mathfrak{M}$ surjektiv. Weil jede Menge $F(n) \in \mathfrak{M}$ abzählbar ist, gibt es surjektive Abbildungen $g_n : \mathbb{N} \to F(n)$. Dann ist $G : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup \mathfrak{M}$, $(n,m) \mapsto g_n(m)$ eine surjektive Abbildung, und weil $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, ist auch $\bigcup \mathfrak{M}$ abzählbar. □

(e) Produkte $M \times N$ abzählbarer Mengen M und N sind abzählbar

Beweis. Für Surjektionen $f : \mathbb{N} \to M$ und $g : \mathbb{N} \to N$ ist $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M \times N$, $(n,m) \mapsto (f(n), g(m))$ surjektiv. □

(f) Folgende Mengen sind abzählbar: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

(g) $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ und $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sind nicht abzählbar.

Beweis. Wir zeigen mit Hilfe der der Russelschen Antinomie zugrunde liegenden Idee für jede Menge M und jede Abbildung $f : M \to \mathscr{P}(M)$, dass f nicht surjektiv ist. Andernfalls wäre die Menge $R = \{x \in M : x \notin f(x)\}$ gleich einen $f(y)$ mit $y \in M$. Für dieses y wäre dann wegen $R = f(y)$

$$y \in R \Leftrightarrow y \notin f(y) \Leftrightarrow y \notin R.$$

Die zweite Aussage folgt aus der ersten, weil $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $A \mapsto I_A$ eine bijektive Abbildung ist. □

(h) All die Kunststücke dieser Nummer stammen von Georg Cantor, der auch gezeigt hat, dass es eine bijektive Abbildung zwischen $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ und der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen gibt (was nicht besonders schwer ist, sobald man die reellen Zahlen eingeführt hat).

Also ist $\mathbb{R}$ überabzählbar und daher „viel größer“ als $\mathbb{Q}$. Ein Problem konnte er allerdings nicht lösen, und das hat ihm mental sehr zugesetzt (um es dramatischer zu formulieren – in den Wahnsinn getrieben): Gibt es zu jeder überabzählbaren Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Bijektion $M \to \mathbb{R}$?

Erst lange nach Cantors Tod, hat Paul Cohen 1963 gezeigt, dass diese sogenannte *Kontinuumshypothese* aufgrund der Axiome der Mengenlehre *unentscheidbar* ist.

2.14 Äquivalenzrelationen

(a) Eine Relation R von X nach X (dann sagt man auch Relation *in* X) heißt eine *Äquivalenzrelation* in X, falls für alle $x, y, z \in R$ folgende drei Bedingungen gelten:

(Ä1)	$(x,x) \in R$	(Reflexivität)
(Ä2)	$(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$	(Symmetrie)
(Ä3)	$(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$	(Transitivität).

In diesem Fall schreibt man $x \sim_R y$ oder bloß $x \sim y$ anstatt $(x,y) \in R$. Die Schnitte $R[x] = \{y \in X : (x,y) \in R\}$ heißen dann *Äquivalenzklassen* bezüglich R und man schreibt

$$[x] = [x]_R = [x]_\sim = x/R = x/\sim \text{ anstatt } R[x].$$

Warnung: Es gibt in der Regel viele verschiedene Elemente, die dieselbe Äquivalenzklasse erzeugen.

(b) Genauer gilt nämlich $[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow [x]_\sim = [y]_\sim$.

Beweis. Ist nämlich $z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim$, so gelten wegen der Symmetrie $x \sim z$ und $z \sim y$, so dass $x \sim y$ wegen der Transitivität. Die zweite Aussage impliziert die dritte ebenfalls wegen der Transitivität, und die erste folgt aus der dritten, weil wegen $x \sim x$ die Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ nicht leer ist. □

Will man Aussagen über eine Äquivalenzklasse K treffen, so kann man $K = [x]_\sim$ benutzen, aber die Aussage darf dann nicht von dem speziellen x (einem *Repräsentanten* der Klasse) abhängen. Zur Verdeutlichung ein wichtiges Beispiel:

(c) Wir betrachten $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, wobei $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $R = \{((n,m),(p,q)) : nq = pm\}$. Zwei äquivalente Paare ganzer Zahlen nennt man auch *verhältnisgleich*, und in dieser Situation schreibt man $\frac{n}{m}$ oder n/m anstatt $[(n,m)]_R$ und nennt diese Äquivalenzklasse einer *rationale Zahl*. Zwei solche Zahlen n/m und p/q sind also genau dann gleich, wenn $nq = pm$. Der Ausdruck *x ist eine rationale Zahl mit ungeradem Nenner* ist keine sinnvolle Aussage: Es gilt $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ aber einmal ist der Nenner ungerade und das andere mal gerade. Aus gleichem Grund liefert die Formel $n/m \oplus p/q = \frac{n+p}{m+q}$ keine Abbildung von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ (geschweige denn so etwas wie die Addition rationaler Zahlen).

Was wir hier gemacht haben, ist eines der wichtigsten und genialsten Prinzipien der Mathematik: Man fasst die Äquivalenzklassen als eigenständige Objekte auf und vergisst später, dass es sich um Klassen handelt:

(d) Für eine Äquivalenzrelation R in X nennt man das System der Äquivalenzklassen den *Quotientenraum modulo R* und schreibt

$$X/R = X/\sim = \{K \subseteq X : \text{ es gibt } x \in X \text{ mit } K = [x]_R\}.$$

Der Quotientenraum X/R ist eine *Zerlegung* von X, das heißt für jedes $x \in X$ gibt es genau ein $K \in X/R$ mit $x \in K$. Andererseits liefert jede Zerlegung $\mathfrak{M}$ von X eine Äquivalenzrelation $R_{\mathfrak{M}} = \{(x, y) \in X \times X : \text{ es gibt } M \in \mathfrak{M} \text{ mit } \{x, y\} \subseteq M\}$, so dass $\mathfrak{M} = X/R_{\mathfrak{M}}$.

(e) Für eine surjektive Abbildung $f : X \to Z$ ist durch $F_f = \{(x, y) \in X \times X : f(x) = f(y)\}$ eine Äquivalenzrelation definiert, so dass der Quotientenraum

$$X/R_f = \{f^{-1}[z] : z \in Z\}$$

gerade die Menge der *Fasern* $f^{-1}[z] = \{x \in X : f(x) = z\}$ ist. Für die *Quotientenabbildung* $q_R : X \to X/R$, $x \mapsto [x]_R$ erhält man, dass jede Äquivalenzrelation von dieser Form ist. Man kann f als Zuordnung einer Eigenschaft interpretieren, so dass die Äquivalenz gerade bedeutet, die selbe Eigenschaft zu haben.

(f) Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und F eine Äquivalenzrelation in X. Häufig will man eine Abbildung

$$X/R \to Y, [x]_R \mapsto f(x)$$

als die Relation $S = \{(K, y) \in X/R \times Y\colon \text{es gibt } x \in K \text{ mit } f(x) = y\}$ definieren. Diese Relation ist aber oft *keine* Abbildung, so dass die für Abbildungen reservierte Symbolik $[x]_\sim \mapsto f(x)$ nicht zulässig ist. Zum Beispiel ist

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, n/m \mapsto n + m$$

keine Abbildung, weil $(1/2, 3) \in S$ und wegen $1/2 = 2/4$ auch $(1/2, 6) \in S$ gilt. Ist S tatsächlich eine Abbildung, so sagt man, dass durch $X/R \to Y$, $[x]_R \mapsto f(x)$ eine Abbildung *wohldefiniert* ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle $x \sim y$ stets $f(x) = f(y)$ gilt, das heißt f ist auf den Äquivalenzklassen konstant.

(g) Seien wieder $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, R die Äquivalenzrelation aus (c) und $\mathbb{Q} = X/R$. Dann sind

$$\oplus : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, ((n, m), (p, q)) \mapsto \frac{nq + mp}{mq} \text{ und}$$
$$\odot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, ((n, m), (p, q)) \mapsto \frac{np}{mq}$$

wohldefinierte Abbildung.

(Hier wird das Prinzip aus (f) für die Relation $R \times R$ in $X \times X$ benutzt.) Hat man erst einmal diese *Addition* und *Multiplikation* rationaler Zahlen wohldefiniert, so sind die Rechenregeln wie zum Beispiel das Distributivgesetzt $\frac{n}{m} \odot \left(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}\right) = \frac{n}{m} \odot \frac{p}{q} \oplus \frac{n}{m} \odot \frac{r}{s}$ leicht nachzurechnen, indem man die Rechenregeln in $\mathbb{Z}$ auf Repräsentanten anwendet (man muss hier bloß die Äquivalenz von $(n(ps + qr), mqs)$ und $(npms + nrmq, mqms)$ zeigen).

Wir identifizieren von nun an jede ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ mit der rationalen Zahl $z/1$, so dass also wie gewohnt $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ gilt. Außerdem schreiben wir $x + y$ und $x \cdot y$ anstatt $x \oplus y$ und $x \odot y$.

KAPITEL 3

Reelle und komplexe Zahlen

Wir haben in Satz 1.5 gezeigt, dass es keine rationale Zahl mit $q = n/m$ mit $q^2 = 2$ gibt. Anders ausgedrückt: Die Gleichung $x^2 = 2$ hat in $\mathbb{Q}$ keine Lösung. Weil viele Probleme auf das Lösen von Gleichungen hinauslaufen, wollen wir $\mathbb{Q}$ so vergrößern, dass man einerseits weiterhin so rechnen kann, wie in der Schule gelernt, und andererseits mehr Gleichungen lösen kann. Damit klar ist, was genau wir eigentlich suchen, ist es nützlich, die Rechenregeln in $\mathbb{Q}$ präzise zu formulieren. Um die Definition kurz zu halten, erinnern wir an den Begriff der *abelschen Gruppe* aus der linearen Algebra: Dies ist eine Menge M zusammen mit einer Abbildung $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x \diamond y$, so dass $x \diamond y = y \diamond x$ (Kommutativität) und $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$ (Assoziativität), und es ein neutrales Element e gibt mit $e \diamond x = x$, für das die Gleichung $x \diamond a = e$ für jedes $a \in M$ (eindeutig) lösbar ist. In dieser Situation sagt man: $(M, \diamond)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e. Zwei interessante Beispiele sind $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ mit den neutralen Elementen 0 beziehungsweise 1. Wie am Ende des 2. Kapitels gesehen, vertragen sich die beiden Operationen.

3.1 Körper

(a) Eine Menge K zusammen mit zwei Abbildungen $+$ und $\cdot$ von $K \times K \to K$ und zwei verschiedenen Elementen 0 und 1 heißt ein *Körper*, falls $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppen mit neutralen Elementen 0 beziehungsweise 1 sind und für alle $x, y, z \in K$ das Distributivgesetz $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ gilt.

(b) Der wichtigste Körper im Moment ist natürlich $\mathbb{Q}$ mit der Addition und Multiplikation aus 2.13 (g).

(c) Auch wenn man die Addition und Multiplikation so gut wie immer (meistens stillschweigend) mit $+$ und $\cdot$ bezeichnet, können sie in verschiedenen Körpern ziemlich unterschiedlich aussehen. Hier ein exotisches Beispiel: $K = \{0, 1\}$ versehen mit den Operationen

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

ist ein Körper, in dem $1 + 1 = 0$ gilt!

Das Beispiel verliert seinen Schrecken, wenn man $0 =$ *gerade* und $1 =$ *ungerade* liest – die Summe ungerader Zahlen ist nun einmal gerade. Dieser Körper K ist für unsere Vorlesung nicht so besonders wichtig. Er zeigt aber zum Beispiel, dass man für den Beweis von $1+1 \neq 0$ in $\mathbb{Q}$ (was natürlich wahr ist) weitere Eigenschaften braucht als die in der Definition von Körpern formulierten (nämlich zum Beispiel die Ordnung der rationalen Zahlen).

(d) Wir vereinbaren wie in der Schule *Punkt- vor Strichrechnung*, so dass man im Distributivgesetz zwei Klammerpaare einsparen kann. Wegen der Assoziativgesetze brauchen wir auch in $(x+y)+z = x+(y+z)$ und $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ keine Klammern, und wir lassen meistens den Multiplikationspunkt weg. Außerdem schreiben wir $1/x$ oder x^{-1} für das multiplikative Inverse von x, $-x$ für das additive Inverse sowie $x/y = x(y^{-1})$ und $x - y = x + (-y)$.

Schließlich schreiben wir $x^0 = 1$ und $x^n = x \cdots x$ für die *n-te Potenz* (also dem Produkt mit n Faktoren, die alle gleich x sind).

3.2 Satz.
Seien K ein Körper und $x, y, z \in K$.

(a) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$,

(b) $0x = 0$,

(c) $xy = xz \Rightarrow x = 0$ oder $y = z$,

(d) $(-x)y = -(xy)$ und $(-x)(-z) = xz$.

Beweis.

(a) folgt durch Addition des additiven Inversen von x auf beiden Seiten.

(b) Wegen des Distributivgesetzes ist $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = 0x + 0$ und mit (a) für $z = 0$ folgt $0x = 0$.

(c) ist $x \neq 0$, so kann man beide Seiten mit x^{-1} multiplizieren.

(d) Es ist $(-x)y + xy = (-x + x)y = 0y = 0$, so dass $(-x)y$ das additive Inverse von xy ist. Der zweite Teil folgt aus $(-x)(-y) = -(x(-z)) = -((-z)x) = -(-(xz)) = xz$.

□

3.3 Endliche Summen

(a) In einer abelschen Gruppe $(K, +)$ kommt es auf die Summationsreihenfolge nicht an. Um also die Summe endlich vieler Elemente x_k mit $k \in M$ (das heißt genauer: $x : M \to K$ ist eine Abbildung mit $x_k = x(k)$ und einer endlichen Menge M) zu definieren, wählt man irgendeine Bijektion (Reihenfolge) $\varphi : \{1, \ldots, m\} \to M$ und setzt

$$\sum_{k \in M} x_k = x_{\varphi(1)} + \ldots + x_{\varphi(m)}.$$

Meistens ist $M = \{a, a + 1, \ldots, b\}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, und dann schreibt man

$$\sum_{k \in M} x_k = \sum_{n=a}^{b} x_n = \sum_{\heartsuit=a}^{b} x_\heartsuit.$$

(b) Streng genommen handelt es sich bei der Summe $\sum_{n=1}^{m} x_{\varphi(n)}$ um eine *rekursive* Definition: Für $M = \emptyset$ definiert man $\sum_{x \in \emptyset} x = 0$ (das neutrale Element der Gruppe) und für $m \in \mathbb{N}$ definiert man $\sum_{n=1}^{m} x_{\varphi(m)} = x_{\varphi(1)} + \sum_{n=1}^{m-1} x_{\varphi(n)}$. Der Vorteil dabei ist, dass man keine Pünktchen braucht.

(c) Aus den Assoziativ- und Kommutativgesetzen erhält man

$$\sum_{k \in M} (x_k + y_k) = \Big(\sum_{k \in M} x_k \Big) + \Big(\sum_{k \in M} y_k \Big),$$

und ist K ein Körper, so liefert das Distributivgesetz

$$\sum_{k\in M} ax_k = a\sum_{k\in M} x_k.$$

(d) Manche Summen kann man ausrechnen, indem man geschickt die Summationsreihenfolge ändert. Zum Beispiel gilt

$$\sum_{n=1}^{m} = 1+2+\ldots+m = m+(m-1)+\ldots+1 = \sum_{n=1}^{m} m-n+1$$

und mit (c) folgt

$$2\sum_{n=1}^{m} n = \sum_{n=1}^{m} n + \sum_{n=1}^{m}(m-n+1) = \sum_{n=1}^{m}(m+1) = m(m+1),$$

weil die Summanden nicht vom Summationsindex abhängen.

(e) Ein weiterer *Trick* ist, die Summanden als $x_n = y_n - y_{n+1}$ zu schreiben. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{m} x_n = \sum_{n=1}^{m}(y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_2 + y_2 - y_3 + y_3 - y_4 + \ldots + y_n - y_{n+1} = y_1 - y_{m+1}$$

Man nennt $\sum_{n=1}^{m} y_n - y_{n+1}$ eine *Teleskopsumme.*

(f) Ein konkretes Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}$$

(g) Endliche Produkte $\prod_{k\in M} x_k$ definiert man analog zu Summen (wobei $\prod_{k\in\emptyset} x_k = 1$).

3.4 Satz (Geometrische Summe).
Seien K ein Körper, $q \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}.$$

Beweis. Mit dem Distributivgesetz erhalten wir eine Teleskopsumme:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q^{k+1} = 1 - q^{n+1}. \qquad \square$$

Ist $q \neq 1$ so kann man in der geometrischen Summenformel durch $1-q$ teilen und erhält

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $q = 1$ hingegen ist $\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$.

3.5 Satz (Der Binomialsatz).
Seien K ein Körper, $a, b \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

In den für uns wichtigen Fällen ist K der Körper der (noch zu definierenden) reellen oder komplexen Zahlen, und dann ist $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ das gewöhnliche Produkt. In exotischen Körpern wie $K = \{0,1\}$ ist allerdings mx als Summe $x + \cdots + x$ mit m Summanden zu interpretieren (und dies ist in $K = \{0,1\}$ entweder $= x$, falls m ungerade, oder $= 0$, falls m gerade).

Beweis. Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ haben wir in 2.11(f) eingeführt und gezeigt, dass $\binom{n}{k}$ die Kardinalität des Systems der k-elementigen Teilmengen von $N = \{1, \dots, n\}$ ist. Für beliebige a_k, b_k entsteht beim Ausmultiplizieren von $(a_1 + b_1) \cdots (a_n + b_n)$ eine Summe über alle Produkte $\prod\limits_{j \in E} a_j \prod\limits_{j \in E^c} b_j$ mit $E \subseteq N$ (was man zur Not durch Induktion zeigt), also gilt

$$\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{E \subseteq N} \prod_{j \in E} a_j \prod_{j \in E^c} b_j.$$

In unserem Fall sind $a_j = a$ und $b_j = b$, und für $|E| = k$ ist der entsprechende Summand $a^k b^{n-k}$, der nur von k aber nicht von dem speziellen E mit $|E| = k$ abhängt. Damit erhalten wir also

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|E|=k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{P}_k(N)| a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \qquad \square$$

Als Übungsaufgabe empfehlen wir, den Binomialsatz induktiv zu beweisen. Der Fall $n = 2$ enthält wegen $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$ und $\binom{2}{1} = 2$ die binomischen Formeln der Schulmathematik

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ und } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Auch die dritte binomische Formel $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ hat eine Verallgemeinerung:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

Dies beweist man so, wie die geometrische Summenformel, oder man wendet sie auf $q = a/b$ an und multiplizert mit b^{n+1}.

Wir verfolgen nun wieder das Ziel, $\mathbb{Q}$ so zu vergrößern, dass die Gleichung $x^2 = 2$ lösbar wird. Dazu betrachten wir die Ordnung in $\mathbb{Q}$ und untersuchen die Menge $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 \leq 2\}$. Diese Menge hat kein größtes Element (was aber nicht ungewöhnlich ist: $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ hat auch kein größtes). Schlimmer aber ist, dass die Menge $S = \{s \in \mathbb{Q} :$ für alle $a \in A$ ist $a \leq s\}$ kein kleinstes Element hat. Wir werden nämlich später sehen, dass so ein kleinstes Element von S die Gleichung $x^2 = 2$ lösen würde: Die Vergrößerung von $\mathbb{Q}$ wird darin bestehen, solche Elemente zu „erfinden“ und zu $\mathbb{Q}$ hinzuzufügen.

3.6 Ordnung

(a) Eine Relation R in einer Menge X heißt *Ordnung* (oder genauer: Totalordnung), falls für alle $x, y, z \in X$ die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(O1)	$(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$	$\Longrightarrow$	$(x, z) \in R$	(Transitivität)
(O2)	$(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$			(Vergleichbarkeit)
(O3)	$(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$	$\Longrightarrow$	$x = y$	(Antisymmetrie)

In diesem Fall schreibt man sehr oft $x \leq y$ oder $y \geq x$ anstatt $(x, y) \in R$ sowie $x < y$ oder $y > x$, falls $x \leq y$ und $x \neq y$. Die Aussage $x \leq y$ liest man als *x ist kleiner gleich y*. Falls $x \leq y$ und $y \leq z$, schreibt man $x \leq y \leq z$, die Transitivität impliziert dann $x \leq z$.

Eine Relation, die bloß (O1) und (O3) sowie $x \leq x$ erfüllt, heißt *Halbordnung*.

(b) Zwei Beispiele sind $\mathbb{Z}$ mit $n \leq m$, falls es $k \in \mathbb{N}_0$ mit $m = n + k$ gibt, und $\mathbb{Q}$ mit $n/m \leq p/q$, falls es $k \in \mathbb{N}_0$ und $\ell \in \mathbb{N}$ gibt mit $n/m + k/\ell = p/q$. (Falls m und q in $\mathbb{N}$ sind, ist dies äquivalent zu $qn \leq mp$ – allerdings ist zu beachten, dass man jeden Bruch sowohl mit positivem als auch mit negativem Nenner schreiben kann.)

Die Relation $A \subseteq B$ in $\mathscr{P}(M)$ ist eine Halbordnung aber keine Ordnung.

(c) Für $a, b \in X$ heißen Mengen der Form

$$\begin{aligned}]a, b[&= \{x \in X : a < x < b\}, \\ [a, b[&= \{x \in X : a \leq x < b\}, \\ ]a, b] &= \{x \in X : a < x \leq b\} \text{ und} \\ [a, b] &= \{x \in X : a \leq x \leq b\} \end{aligned}$$

Intervalle. Oft findet man auch die Bezeichnung (a, b) statt $]a, b[$. Wir bevorzugen letztere, um Verwechslungen mit geordneten Paaren auszuschließen.

(d) Sind $(X, \leq)$ mit $(Y, \trianglelefteq)$ zwei geordnete Mengen, so heißt eine Abbildung: $f : X \to Y$ *(streng) monoton wachsend*, falls $x < y \Rightarrow f(x) \trianglelefteq f(y)$ (beziehungsweise $f(x) \triangleleft f(y)$) für alle $x, y \in X$ gilt. Falls $x < y$ immer $f(x) \trianglerighteq f(y)$ (beziehungsweise $f(x) \triangleright f(y)$) impliziert, heißt f *(streng) monoton fallend*. Monoton wachsende oder fallende Funktionen nennt man auch *isoton* beziehungsweise *antiton*.

(e) Eine Teilmenge A der geordneten Menge $(X, \leq)$ heißt nach *oben beschränkt*, falls es ein $m \in X$ gibt mit $a \leq m$ für alle $a \in A$. Jedes solche $m \in X$ heißt dann eine *Majorante* von A (bezüglich $\leq$). Ein Element $s \in X$ heißt *Supremum von A*, falls s die kleinste Majorante von A ist, das heißt s ist eine Majorante von A und für jede Majorante m von A gilt $s \leq m$.

(f) $s \in X$ ist genau dann ein Supremum von A, wenn
(1) $a \leq s$ für alle $a \in A$ und (2) für alle $x < s$ gibt es $a \in A$ mit $x < a$.
Jede Menge hat höchstens ein Supremum.

Beweis. Die Bedingung (1) besagt gerade, dass s eine Majorante ist, und die Bedingung (2), dass jedes echt kleinere Element keine Majorante ist. Sind s und t zwei Suprema, so gilt $s \leq t$, weil s kleiner als die Majorante t ist, und aus gleichem Grund ist $\leq s$. Wegen der Antisymmetrie ist also $s = t$. $\square$

(g) Wegen der Eindeutigkeit, können wir für jede Menge A, die ein Supremum besitzt, diesem Supremum einen Namen geben, und es mit $\sup A$ bezeichnen. Wann immer man dieses Symbol benutzt, muss man also zeigen, dass das Supremum tatsächlich existiert.

(h) Ist $a \in A$ eine Majorante von A, so gilt $a = \sup A$. In diesem Fall nennt man a das *Maximum* von A und schreibt

$$\sup A = \max A.$$

Weil je zwei Element vergleichbar sind, hat jede zweielementige Menge ein Maximum (und also auch ein Supremum), und mit vollständiger Induktion zeigt man, dass endliche Mengen stets ein Maximum besitzen.

(i) Das Beispiel $A = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}$ zeigt, dass ein Supremum (nämlich $\sup A = 0$) nicht in der Menge zu liegen braucht. Die Eigenschaft von $\mathbb{Q}$, die man dazu benötigt ist die sogenannte *Dichtheit*: Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$ gibt es $c \in \mathbb{Q}$ mit $a < c < b$ (die Zahl $c = \frac{a+b}{2}$ erfüllt die Bedingung, weil $c = a + \frac{b-a}{2} > a$ und $b = c + \frac{b-a}{2} > c$).

(j) Die Menge $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 \leq 2\}$ hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Beweis. Wir werden später sehr leicht zeigen können, dass ein Supremum s von A die Gleichung $s^2 = 2$ löst, was Satz 1.5 widerspricht. Hier benutzen wir für $a, b \geq 0$ die Tatsache, dass $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$, was insbesondere zeigt, dass jedes $m \geq 0$ mit $m^2 \geq 2$ eine Majorante ist.

Wir nehmen nun an, dass es $s = \sup A$ gibt, und zeigen, dass beide Fälle $s^2 < 2$ und $s^2 > 2$ unmöglich sind.

Annahme, es gilt $s^2 < 2$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $(s + \delta)^2 < 2$, nämlich zum Beispiel $\delta = \frac{2-s^2}{s+2}$ (später werden wir ein sehr viel allgemeineres Argument, nämlich die Stetigkeit von $x \mapsto x^2$, kennenlernen, das uns den lästigen Nachweis erspart, dass dieses δ geeignet ist: man rechnet hier einfach $(s + \delta)^2 - 2 = 2(s^2 - 2)/(2 + s)^2$ aus). Dann gilt also $s + \delta \in A$ und $s + \delta > s$ im Widerspruch dazu, dass s eine Majorante von A ist.

Annahme, es gilt $s^2 > 2$. Dann gibt es ein $\sigma \in \,]0, s[$ mit $(s - \sigma)^2 > 2$, so dass $s - \sigma$ eine Majorante von A ist, die echt kleiner ist als s, was der Tatsache widerspricht, dass s kleiner ist als jede Majorante. □

(k) Analog zu den Begriffen Majorante, Supremum und Maximum definieren wir *Minoranten, Infima* und *Minima*, indem wir überall $\leq$ durch $\geq$ ersetzen. Im Falle der Existenz ist also das Infimum $\inf A$ von A die größte Minorante, und falls es eine Minorante $a \in A$ gibt, schreiben wir $\inf A = \min A$.

(l) Wir wollen nun fehlende Suprema zu einer geordneten Menge hinzufügen und dabei so ökonomisch wie möglich vorgehen, das heißt, falls zwei Mengen die gleichen oberen Schranken haben (wie zum Beispile A aus (g) und $B = \{a \in A : a \geq 0\}$), so sollen sie das selbe Supremum besitzen.

Eine Menge $\alpha \subseteq X$ heißt *(Dedekindscher) Schnitt* in $(X, \leq)$, falls

(D1) $\alpha \neq \emptyset$ und $\alpha \neq X$,
(D2) für alle $a \in \alpha$ und $b \in X$ mit $b \leq a$ gilt $b \in \alpha$,
(D3) α hat kein größtes Element (= Maximum).

Zum Beispiel ist für jedes $x \in \mathbb{Q}$ die Menge $\{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$ ein Schnitt in $\mathbb{Q}$.

3.7 Satz (Ordnungsvervollständigung).
Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge ohne kleinstes Element, so dass für alle $x < z$ ein $y \in X$ mit $x < y < z$ existiert.
Dann ist $\tilde{X} = \{\alpha \leq X : \alpha$ Dedekindscher Schnitt$\}$ versehen mit der Relation $\alpha \subseteq \beta$ eine geordnete Menge, so dass jede nach oben (unten) beschränkte Menge $A \neq \emptyset$ ein Supremum (Infimum) besitzt. Außerdem ist $\varphi : X \to \tilde{X}, x \mapsto \{a \in X : a < x\}$ eine injektive Abbildung mit den Eigenschaften:

(a) Für alle $x, y \in X$ gilt $x \leq y \Leftrightarrow \varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ und

(b) Für alle $\alpha, \beta \in \tilde{X}$ mit $\alpha \subseteq \beta$ gibt es $x \in X$ mit $\alpha \subseteq \varphi(x) \subseteq \beta$.

Fassen wir, wie im Satz, die Inklusion $A \subseteq B$ als Ordnung auf, so ist $A \subset B$ die *strikte Inklusion* $A \subseteq B$ und $A \neq B$. Weil in der Literatur $\subset$ oft als gewöhnliche Inklusion definiert wird, schreiben wir später lieber $A \subsetneq B$.

Beweis. Wir werden mehrmals folgende Konsequenz aus (D2) benutzen:
Für $\alpha \in \tilde{X}$ und $x \in X$ gilt $x \notin \alpha \Leftrightarrow$ für alle $a \in \alpha$ ist $a < x$.(*)

Wir zeigen nun zuerst, dass $\tilde{X}$ durch die Inklusion geordnet ist. Die Bedingungen (O1) und (O3) sind klar, und für den Beweis von (O2) betrachten wir $\alpha, \beta \in \tilde{X}$, so dass es $b \in \beta \setminus \alpha$ gibt. Wegen (*) ist dann $a < b$ für alle $a \in \alpha$, was wegen (D2) $\alpha \subseteq \beta$ impliziert.

Also ist $(\tilde{X}, \subseteq)$ eine geordnete Menge. Seien nun $\emptyset \neq A \subseteq \tilde{X}$ nach oben beschränkt und $\gamma \in \tilde{X}$ eine Majorante. Wir zeigen, dass $\sigma = \bigcup A$ ein Schnitt ist: Wegen $A \neq \emptyset$ und $\alpha \neq \emptyset$ für jedes $\alpha \in A$ ist $\sigma \neq \emptyset$, und wegen $\sigma \subseteq \gamma$ und $\gamma \neq X$ ist auch $\sigma \neq X$. Ist $a \in \sigma$ und $b < a$, so gibt es $\alpha \in A$ mit $a \in \alpha$, was $b \in \alpha \subseteq \sigma$ impliziert. Schließlich hat σ kein Maximum, weil das dann Maximum eines Schnitts $\alpha \in A$ wäre.

Offenbar ist σ die kleinste Menge (also insbesondere auch der kleinste Schnitt), die alle $\alpha \in A$ enthält und daher ein Supremum von A.

Ist andererseits $B \neq \emptyset$ nach unten beschränkt, so ist $A = \{\alpha \in \tilde{X} : \alpha$ Minorante von $B\} \neq \emptyset$, und $\sup A = \bigcup A$ ist wieder eine Minorante und offenbar die Größte.

Wir zeigen als nächstes, dass die Mengen $\varphi(x) = \{a \in X : a < x\}$ tatsächlich Schnitte sind, so dass φ eine Abbildung $X \to \tilde{X}$ ist.

(D1) folgt aus $x \notin \varphi(x)$ und der Voraussetzung, dass X kein Minimum hat. (D2) folgt aus der Transitivität der Ordnung und (D3) aus der Voraussetzung, dass zwischen zwei Elementen stets ein weiteres liegt. Ist $x < y$, so gilt $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ wegen der Transitivität und $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, weil $x \in \varphi(y) \setminus \varphi(x)$. Insbesondere ist φ injektiv, und die Implikation $\Leftarrow$ in (a) folgt aus der Definition von $\varphi(y)$ (aus $y < x$ würde der Widerspruch $y \in \varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ folgen). Sind schließlich α, β zwei Schnitte mit $\alpha \subset \beta$ und $b \in \beta \setminus \alpha$, so folgt $\alpha \subset \varphi(b) \subset \beta$ aus (*). □

3.8 Reelle Zahlen

(a) Wir defnieren $\mathbb{R}$ als die Ordnungsvervollständigung $\tilde{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ versehen mit der in 3.6(b) eingeführten Ordnung. Dann ist also $(\mathbb{R}, \subseteq)$ eine *vollständig geordnete Menge*, das heißt jede nicht-leere nach oben oder unten beschränkte Menge hat ein Supremum beziehungsweise Infimum.

(b) Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so gilt $\bigcup A = \mathbb{Q}$ – und dies ist zwar die kleinste Obermenge aller $\alpha \in A$ aber kein Dedekindscher Schnitt wegen (D1). Analog ist für eine nicht nach unten beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ die leere Menge die größte Teilmenge aller $\alpha \in A$ aber wiederum kein Schnitt.

Man benutzt gelegentlich die Schreibweisen $\sup A = \infty$ und $\inf B = -\infty$, um kurz auszudrücken, dass A bzw. B nicht nach oben bzw. unten beschränkt sind. (Mit $\infty = \mathbb{Q}$ und $-\infty = \emptyset$ würde dies perfekt zur Konstruktion mittels Dedekindscher Schnitte passen, aber diese Definitionen sind nicht üblich.)

(c) Wir vergessen im Folgenden schnell wieder, dass die Elemente von $\mathbb{R}$ Dedekindsche Schnitte sind, und schreiben $x \leq y$ anstatt $x \subseteq y$. Außerdem fassen wir $\mathbb{Q}$ als *Teilmenge* von $\mathbb{R}$ auf, das heißt, wir betrachten $\varphi(\mathbb{Q})$ statt $\mathbb{Q}$. Die Eigenschaft (a) besagt dann, dass es egal ist, ob man $p \leq q$ so wie in 3.6 (b) oder als die Relation in $\mathbb{R}$ versteht. Die Eigenschaft (b) besagt, dass es zwischen zwei Elementen von $\mathbb{R}$ immer eine rationale Zahl gibt. Außerdem hat $\mathbb{R}$ weder Maximum noch Minimum.

Hier zwei wichtige Konsequenzen der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$:

(d) Intervallschachtelung: Seien $I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leere Intervalle mit $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Beweis. Für alle $n \leq m$ gilt $I_m \subseteq I_n$ und daher $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$. Also ist jedes b_n eine Majorante von $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$, so dass $\alpha = \sup\{a_m : m \in \mathbb{N}\} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil α eine Minorante von $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist, folgt $\alpha \leq \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Also ist $[\alpha, \beta]$ nicht leer und außerdem Teilmenge alle I_n. □

(e) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis. Andernfalls gäbe es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wir setzen $I_0 = [0, 1]$ und konstruieren induktiv Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n < b_n$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ und $f(n) \notin I_n$. Sind $I_0, \cdots, I_{n-1}$ schon konstruiert, wählen wir $c_n \in \,]a_n, b_n[$ mit $c_n \neq f(n+1)$. Dann ist entwerder $f(n+1) \notin [a_n, c_n]$ oder $f(n+1) \notin [c_n, b_n]$, und wir definieren dann I_{n+1} als $[a_n, c_n]$ beziehungsweise $[c_n, b_n]$.

Wegen des Intervallschachtelungsprinzips ist Durchschnitt aller I_n nicht leer, und jedes Element x dieses Durchschnitts ist von allen $f(n)$ verschieden (weil $x \in I_n$ und $f(n) \notin I_n$). Dies widerspricht der Surjektivität von f. □

Bisher haben wir nur die Ordnung von $\mathbb{Q}$ fortgesetzt (*vervollständigt*) aber noch nicht die Körperoperationen. Um dies tun zu können, brauchen wir folgende *Verträglichkeitsbedingungen*:

(f) Ein Körper K versehen mit einer Ordnung $\leq$ heißt ein *geordneter Körper*, falls für alle $x, y, z \in K$ folgende Bedingungen gelten

(VA) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq x + z$,

(VM) $x \geq 0$ und $y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$.

(g) Als wichtigstes Beispiel halten wir fest, dass $\mathbb{Q}$ ein geordneter Körper ist. Das exotische Beispiel $K = \{0, 1\}$ mit $1 + 1 = 0$ hat zwar zwei Ordnungen, aber keine davon macht K zu einem geordneten Körper: Falls $0 \leq 1$, folgt (mit $z = 1$ in VA) $1 = 0 + 1 \leq 1 + 1 = 0$, und die Antisymmetrie liefert $0 = 1$. Genauso folgt aus $1 \leq 0$ ein Widerspruch.

(h) In jedem geordneten Körper gelten
(1) $a \le b$ und $y \ge 0 \Rightarrow ay \le by$,
(2) $a \le b \Rightarrow -b \le -a$,
(3) $a \le b$ und $y \le 0 \Rightarrow ay \ge by$.

Beweis. Wegen (VA) mit $z = -a$ ist $x = b - a \ge 0$, was wegen (VM) $yb - ya = yx \ge 0$ impliziert. Wiederum (VA) liefert $yb \ge ya$. (2) erhält man aus (VA) mit $z = -b - a$, und (3) folgt aus (1) und (2). □

(i) Wir definieren nun eine Addition in $\mathbb{R}$ durch

$$x \oplus y = \sup\{p + q : p, q \in \mathbb{Q},\ p \le x,\ q \le y\}.$$

Dann gelten für $x, y, z \in \mathbb{R}$ folgende Aussagen:
(1) $x \le y \Rightarrow x \oplus z \le y \oplus z$,
(2) $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \oplus y = x + y$
(3) $x \oplus y = y \oplus x$ und $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$,
(4) 0 ist neutrales Element
(5) $\bar{x} = \inf\{r \in \mathbb{Q} : -r \le x\}$ erfüllt $x \oplus \bar{x} = 0$.

Beweis. Man stellt zunächst leicht fest, dass die Menge in der Definition von $x \oplus y$ nicht leer und nach oben beschränkt ist.

Die reelle Summe ist also tatsächlich eine Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Im folgenden Beweis seien p, q, r, s, t stets rational.

Für (1) reicht es zu bemerken, dass $\{p+q : p \le x, q \le z\} \subseteq \{p+q : p \le y, q \le z\}$ gilt. Die Aussage (2) folgt aus (VA) für die rationalen Zahlen (das Supremum ist das Maximium), und die Kommutativität in (3) ist klar. Für die Assoziativität nehmen wir $(x \oplus y) \oplus z < x \oplus (y \oplus z)$ an und finden wegen der Dichtheit ein $u \in \mathbb{Q}$ mit $(x \oplus y) \oplus z < u < x \oplus (y \oplus z)$. Für alle $p \le x$, $q \le y$ und $r \le z$ ist dann $p + q + r < u$, und somit $q + r < u - p$, was $y \oplus z \le u - p$ impliziert. Für alle $p \le x$ und $s \le y \oplus z$ ist daher $p + s \le u$, so dass $x \oplus (y \oplus z) \le u < x \oplus (y + z)$, im Widerspruch zur Antisymmetrie. Genauso erhält man aus $x \oplus (y \oplus z) < (x \oplus y) \oplus z$ einen Widerspruch.

Die Aussage (4) ist klar, und für (5) zeigen wir zuerst $x \oplus \bar{x} \le 0$: Sind $p \le x$ und $q \le \bar{x}$, so ist $-(-p) \le x$, und daher $q \le \bar{x} \le -p$, was $p + q \le p + (-p) = 0$ zeigt. Für die andere Ungleichung $x \oplus \bar{x} \ge 0$ reicht es zu zeigen, dass $x + \bar{x} > s$ für jedes $s < 0$ gilt (dies impliziert nämlich $x + \bar{x} \ge \sup\{s : s < 0\} = 0$). Wegen (1) gilt $x \oplus s < x$, und daher gibt es $p \in \mathbb{Q}$ mit $x \oplus s < p < x$, so dass $x < p - s$ wegen der Assoziativität. Für jedes $r \in \mathbb{Q}$ mit $-r \le x$ ist also $-r \le p - s$, so dass $r \ge s - p$ und daher $\bar{x} \ge s - p$. Mit (1) folgt also $\bar{x} \oplus x \ge (s - p) \oplus x = s \oplus (-p \oplus x) \ge s$. □

(j) Bei der Definition des Produkts muss man beachten, dass das Produkt negativer Zahlen positiv ist. Deshalb definieren wir die Multiplikation zunächst für $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$: Mit $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$ setzen wir für $x, y \in \mathbb{R}_+$

$$x \odot y = \sup\{pq : p, q \in \mathbb{Q}_+,\ p \le x,\ q \le y\}.$$

Dann beweist man sehr ähnlich wie in (g) folgende Aussagen für $x, y, z \in \mathbb{R}_+$:
(1) $x \le y \Rightarrow x \odot z \le y \odot z$,
(2) $x \odot y = y \odot x$ und $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$,
(3) $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \odot y = xy$,
(4) 1 ist neutrales Element,

(5) für $x > 0$ ist $\tilde{x} = \inf\{r \in \mathbb{Q} : r > 0,\ 1/r \leq x\}$ invers zu x, das heißt $x \odot \tilde{x} = 1$.

Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir schließlich

$$\begin{array}{rcl} x \odot y &=& \overline{\bar{x} \odot y},\ \text{falls } y \geq 0 \text{ und } x \leq 0, \\ x \odot y &=& \overline{x \odot \bar{y}},\ \text{falls } x \geq 0 \text{ und } y \leq 0, \text{ sowie} \\ x \odot y &=& \bar{x} \odot \bar{y},\ \text{falls } x \leq 0 \text{ und } y \leq 0 \end{array}$$

Dann zeigt man durch geduldige Fallunterscheidungen, dass $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \odot)$ eine abelsche Gruppe ist, und schließlich, dass das Distributivgesetz gilt. Man hat dann also auch die Körperoperationen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Wir formulieren all dies im folgenden Satz:

3.9 Theorem
$\mathbb{R}$ versehen mit den Operationen $\oplus$ und $\odot$ ist ein vollständig geordneter Körper, der $\mathbb{Q}$ enthält, so dass die Operationen auf $\mathbb{Q}$ mit den üblichen übereinstimmen und $\mathbb{Q}$ dicht ist.

Wir nennen die Elemente von $\mathbb{R}$ *reelle Zahlen* und schreiben ab jetzt $x+y$ und xy anstatt $x \oplus y$ und $x \odot y$. Wegen der Eigenschaften (2) in 3.8 (g) und (h) ist es egal, ob man in $\mathbb{Q}$ rechnet und das Ergebnis als relle Zahl auffasst oder ob man direkt in $\mathbb{R}$ rechnet. Man nennt deshalb $\mathbb{Q}$ einen *Unterkörper* von $\mathbb{R}$.

3.10 Satz (Wurzeln).
Für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $s \in \mathbb{R}$ mit $s \geq 0$ und $s^n = y$. Wir schreiben dann $s = \sqrt[n]{y}$.

Beweis. Die Abbildung $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^n$ ist streng monoton wachsend und daher injektiv, was die Eindeutigkeit impliziert. Für die Existenz betrachten wir $A = \{a \in \mathbb{R}_+ : a^n \leq y\}$. Dann ist $0 \in A \neq \emptyset$, und A ist nach oben beschränkt, weil zum Beispiel $c = \max\{y, 1\}$ eine Majorante ist. Für $s = \sup A$ zeigen wir $s^n \geq y$ und $s^n \leq y$:

Wir nehmen zuerst $s^n = f(s) < y$ an, und suchen dann $\delta \in]0,1[$ mit $(s+\delta)^n < y$. Dies widerspricht der Tatsache, dass s eine Majorante von A ist. Um δ zu finden, benutzen wir die Folgerung aus der geometrischen Summenformel $a^n - b^n = (a-b)\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$ für $a = s+\delta$ und $b = s$:

$$(s+\delta)^n - s^n = \delta \sum_{k=0}^{n-1} (s+\delta)^k s^{n-k-1} \leq \delta \sum_{k=0}^{n-1} (c+1)^k (c+1)^{n-k-1} = \delta n (c+1)^{n-1}.$$

Für $\delta = \frac{y-s^n}{n(c+1)^{n-1}}$ ist dann also $(s+\delta)^n < y$.

Ganz ähnlich führt die Annahme $s^n > y$ zu einem Widerspruch, indem man $\delta \in]0, s[$ findet mit $(s-\delta)^n > y$. Dann wäre nämlich $s - \delta$ eine Majorante von A, die echt kleiner als s ist. □

Der *Zwischenwertsatz* aus dem 5. Kapitel liefert ein ähnliches aber sehr viel eleganteres Argument für die Existenz von Wurzeln.

3.10 besagt, dass $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^n$ eine streng isotone Bijektion ist. Die Umkehrabbildung $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ y \mapsto \sqrt[n]{y}$ ist dann ebenfalls streng isoton.

3.11 Der Betrag

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den *Betrag von x* als

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ falls } x \geq 0 \\ -x & , \text{ falls } x < 0 \end{cases} .$$

Alternative Darstellungen sind $|x| = \max\{x, -x\}$ oder $|x| = \sqrt{x^2}$.

(b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $d(x, y) = |x - y|$ *Abstand* zwischen x und y. Dieser und allgemeinere Abstände spielen eine herausragende Rolle in den folgenden Kapiteln.

(c) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelten $|x + y| \leq |x| + |y|$ und $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichungen).

Beweis. Wegen $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ ist $x + y \leq |x| + |y|$. Außerdem folgt aus $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$ auch $-(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|$. Die Dreiecksungleichung für den Abstand folgt aus $|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z|$. □

3.12 Die komplexen Zahlen

(a) In $\mathbb{R}$ können wir (wie in jedem Körper) die *(affin-)linearen* Gleichungen $ax + b = c$ mit $a \neq 0$ stets eindeutig lösen (nämlich durch $x = a^{-1}(c - b)$), und außerdem wegen Satz 3.10 die Gleichungen $x^n = y$ für $y \geq 0$.

Allerdings hat die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung in $\mathbb{R}$, weil $x^2 \geq 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Wir wollen nun $\mathbb{R}$ so vergrößern, dass wir einerseits wie gewohnt rechnen können (das heißt, die Vergrößerung soll ein Körper sein) und andererseits auch die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar wird.

Das Argument für die Unlösbarkeit der Gleichung $\mathbb{R}$ zeigt, dass wir einen Preis bezahlen müssen: Der neue Körper kann kein geordneter Körper sein. Wir werden aber sehen, dass es sich lohnt, diesen Preis zu bezahlen.

Wir nehmen an, wir hätten einen Oberkörper $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{R}$ und ein Element $i \in \mathbb{K}$ mit $i^2 = -1$. Dann enthält $\mathbb{K}$ insbesondere alle Ausdrücke $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Für alle $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ sind dann

$$\begin{aligned} (a + ib)(x + iy) &= ax + ibx + aiy + ibiy = (ax - by) + i(ay + bx) \text{ und} \\ (a + ib) + (x + iy) &= (a + x) + i(b + y) \end{aligned}$$

wieder von der Form $\alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Für $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ ist auch das Inverse von $x + iy$ von dieser Gestalt, weil

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right) (x + iy) = \frac{(x - iy)(x + iy)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - (iy)^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Wir haben damit gezeigt, dass – wenn es überhaupt einen Körper $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{R}$ und $i \in \mathbb{K}$ mit $i^2 = -1$ gibt – auch

$$\mathbb{L} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \text{ ein solcher Körper ist.}$$

Für die Existenz eines solchen Körpers „erfinden“ wir ein Objekt i und definieren dann $\mathbb{L}$ sowie die erweiterte Addition und Multiplikaton so wie eben. Um diese Erfindung konkret zu machen, wählen wir folgende Definition:

(c) Wir definieren $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für $(a, b), (x, y) \in \mathbb{C}$, $(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$ sowie $(a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx)$. Die Elemente von $\mathbb{C}$ heißen *komplexe Zahlen*, und für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ heißen $x = \Re z$ und $y = \Im z$ *Real-* beziehungsweise *Imaginärteil* von z.

(d) $\mathbb{C}$ ist ein Körper mit neutralen Elementen $(0, 0)$ und $(1, 0)$.

Beweis. Die Assoziativität und Kommutativität der Addition und Multiplikation sowie das Distributivgesetz rechnet man leicht nach. Außerdem stellt man leicht fest, dass $(0, 0)$ und $(1, 0)$ neutrale Elemente sind, und dass (x, y) das additive Inverse $(-x, -y)$ und im Fall $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ das multiplikative Inverse $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ hat. □

(e) Mit $i = (0, 1)$ können wir jedes $z = (x, y)$ als $z = (x, 0) + i(y, 0)$ schreiben. Wir haben jetzt tatsächlich einen Körper $\mathbb{C}$ konstruiert, in dem i^2 das additive Inverse des neutralen Elements der Multiplikation ist. Allerdings enthält $\mathbb{C}$ den reellen Körper nicht als Teilmenge. Um diesen Defekt zu beheben, betrachten wir die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto (x, 0)$.

Dann gelten $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ und $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ und Φ bildet die neutralen Elemente von $\mathbb{R}$ auf die neutralen Elemente von $\mathbb{C}$ ab. Das heißt, es ist egal, ob wir in $\mathbb{R}$ rechnen und dann das Ergebnis mittels Φ als komplexe Zahl auffassen, oder ob wir direkt in $\mathbb{C}$ rechnen. Im folgenden schreiben wir stets x anstatt $\Phi(x)$, das heißt genauer: Wir vergessen, unsere bisherige Konstruktion von $\mathbb{R}$ und definieren $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0\}$. Dann ist also tatsächlich $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ und die Körperoperationen von $\mathbb{C}$ stimmen auf $\mathbb{R}$ mit denen von $\mathbb{R}$ überein.

Jedes $z \in \mathbb{C}$ schreibt sich nun tatsächlich als $z = x + iy$ mit $x = \Re z \in \mathbb{R}$ und $y = \Im z \in \mathbb{R}$.

(f) In $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnung, die $\mathbb{C}$ zu einem geordneten Körper macht. Wenn man trotzdem $x \leq y$ schreibt, so heißt das, dass $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ und $x \leq y$ (diese Relation $\{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R}, x \leq y\}$ ist zwar transitiv und antisymmetrisch aber keine Ordnung und noch nicht einmal eine Halbordnung, weil z. B. i nicht mit sich selbst vergleichbar ist).

(g) Auch wenn es keine guten Ordnungen in $\mathbb{C}$ gibt, kann man doch den Betrag von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ fortsetzen, weil die Darstellung $|x| = \sqrt{x^2}$ die Ordnung in $\mathbb{R}$ nicht benutzt: Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir den *Betrag* von z durch

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nach Definition der Wurzel ist $|z|$ als diejenige reelle Zahl $r \geq 0$ mit $r^2 = x^2 + y^2$. Für reelles z stimmt diese neue Definition mit der aus 3.11 überein, so dass die Verwendung des gleichen Symbols legitim ist.

(h) Weil Wurzeln von Summen nicht so leicht zu berechnen sind, erweist sich folgende Definition als überaus nützlich: Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt

$$\bar{z} = x - iy$$

die zu z konjugierte Zahl, die also den selben Realteil hat wie z und dessen negativen Imaginärteil.

3.13 Satz.
Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

(a) $\Re z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ *und* $\Im z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,

(b) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$,

(c) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$,

(d) $z\bar{z} = |z|^2$,

(e) $|zw| = |z|\,|w|$,

(f) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Beweis. Die Eigenschaften (a) - (d) sind sehr leichte Übungsaufgaben, und (e) folgt aus der Eindeutigkeit der Wurzeln und

$$|zw|^2 = zw\overline{zs} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2 = (|z|\,|w|)^2.$$

Für (f) berechnen wir zunächst

$$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = z\bar{z} + w\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{w} = |z|^2 + 2\Re z\bar{w} + |w|^2.$$

Wegen der Monotonie der Wurzel gilt für alle $u = a + ib$ mit $a, b \in R$

$$\Re u = a \leq \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |u|,$$

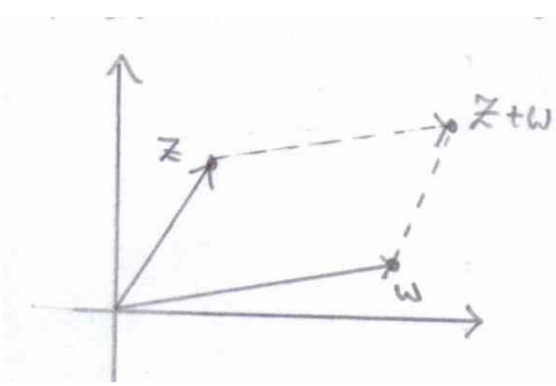
so dass wir weiter abschätzen können:

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

Erneut mit der Monotonie der Wurzel folgt $|z + w| \leq |z| + |w|$. $\square$

3.14 Die Gaußsche Zahlenebene

(a) Jede komplexe Zahl z repräsentiert einen Punkt der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Koordinaten $x = \Re z$ und $y = \Im z$. Die Addition kann man als Vektoraddition interpretieren:



(b) Die Konjugation entspricht der Spiegelung an der reellen Achse.

(c) Die Multiplikation mit $x \geq 1$ ist eine Streckung, die mit $0 \leq x \leq 1$ eine Stauchung und die mit -1 eine Ursprungsspiegelung.

(d) Die Multiplikation mit $w \in \mathbb{C}$ und $|w| = 1$ ist eine Drehung – allerdings können wir noch nicht sagen, was der „Drehwinkel“ ist.

KAPITEL 4

Folgen und Reihen

4.1 Dezimaldarstellung

(a) Man ist daran gewöhnt, positive reelle Zahlen in Dezimaldarstellung $x = x_0, x_1x_2x_3\ldots$, also $\pi = 3,141592653\ldots$ mit $x_0 \in \mathbb{N}_0$ und $x_k \in \{0,1,\ldots,9\}$ anzugeben. Das heißt

$$x = x_0 + x_1/10 + x_2/100 + x_3/1000 + \cdots (*)$$

Die *Ziffern* x_k kann man rekursiv als $x_0 = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leq x\}$ und

$$x_{n+1} = \max\left\{r \in \{0,\ldots,9\} : \sum_{k=0}^{n} x_k/10^k + r/10^{n+1} \leq x\right\} \text{ definieren.}$$

(b) Mit der bisher entwickelten Theorie kann man $(*)$ als

$$x = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} x_k/10^k \quad n \in \mathbb{N}_0\right\}$$

präzisieren, was aber die Idee, dass sich die Summen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k/10^k$ der Zahl x immer mehr *annähern*, nicht besonders klar zum Ausdruck bringt. Besser lässt sich die Idee mit Hilfe des *Abstands* $d(x,y) = |x-y|$ formulieren: Für jede *Toleranz* $\varepsilon > 0$ sind die *Fehler* $d(x,s_n)$ für alle genügend großen $n \in \mathbb{N}$ kleiner als ε.

4.2 Zahlenfolgen

(a) Abbildungen von $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ (oder gelegentlich $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$) nach X nennt man *Folgen in X*. Üblicherweise tauft man solche Abbildungen x, y oder z und schreibt $x_n = x(n)$ für den Wert des Arguments $n \in \mathbb{N}$ sowie $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Letztere Notation ist praktisch, wenn die Folge durch eine explizite Formel gegeben ist, wie zum Beispiel $x = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Menge aller Folgen in X ist $X^{\mathbb{N}}$.

(b) Für Folgen gibt es außer der expliziten Konstruktion die Möglichkeit der *rekursiven Definition*: Für eine Abbildung $f : \mathbb{N} \times X \to X$ und jedes $a \in X$ gibt es genau eine Folge x in X mit $x_0 = a$ und $x_{n+1} = f(n, x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (nämlich $x_1 = f(1,x), x_2 = f(2,x_1), x_3 = f(3,x_2),\ldots$). *

Ein interessantes Beispiel ist die durch $x_0 = z$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{z}{x_n})$ definierte Folge mit $z > 0$ (*Heron-Verfahren* oder *babylonisches Wurzelziehen*). Wir werden später sehen,

*Angesichts der von Neumannschen Konstruktion der natürlichen Zahlen könnte man das Bedürfnis nach einer präziseren Konstruktion ohne die ... verspüren. Dazu nennt man $A \subseteq \mathbb{N}_0 \times X$ eine f-Menge, falls $(0,a) \in A$ und $(n,x) \in A \Rightarrow (n+1, f(n,x)) \in A$. Dann ist tatsächlich der Durchschnitt des Systems aller f-Mengen eine Abbildung mit der gewünschten Eigenschaft.

dass sich diese Folge $\sqrt{z}$ annähert. Für $z = 2$ erhält man z. B.

$$x_0 = 2, x_1 = 1.5, x_2 = 1.41666\ldots, x_3 = 1.414215\ldots$$

(c) Eine Folge $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ heißt *konvergent gegen* $x_\infty \in \mathbb{C}$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N \text{ gilt } |x_n - x_\infty| < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt x_∞ *Grenzwert* oder *Limes* der Folge[†], und man schreibt

$$x \to x_\infty \text{ oder } x_n \to x_\infty \text{ für } n \to \infty \text{ oder } x_\infty = \lim x \text{ oder } x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Folgen, die nicht konvergieren, heißen *divergent.*

(d) Um die drei Quantoren in der Definition übersichtlich zu halten, haben wir etwas lax $\varepsilon > 0$ statt $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ geschrieben sowie $n \geq N$ anstatt $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq N$. Verbal ausgedrückt bedeutet die Konvergenz: Für jede Toleranz gibt es eine Stelle, ab der die *Fehler* $|x_n - x_\infty|$ die Toleranz einhalten. Diese Stelle hängt natürlich von ε ab und wird oft auch N_ε oder $N(\varepsilon)$ genannt. Anders formuliert: Für jedes $\varepsilon > 0$ sind alle bis auf endlich viele Fehler kleiner als ε. Statt *alle bis auf endlich viele* sagt man auch *fast alle.*

(e) Die Konvergenz einer Folge hängt nur *vom Ende* der Folge ab, also nicht von den ersten zum Beispiel 1000 Folgengliedern. Deshalb ändert sich nichts an der Definition, wenn man Folgen $x : \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \to \mathbb{C}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ betrachtet.

(f) Beispiel: $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

Zum Beweis sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$.[‡] Für jedes $n \geq N$ gilt dann $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = 1/n \leq 1/N < \varepsilon$.

(g) Um die Bezeichnung $x_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ zu rechtfertigen, muss man zeigen, dass der Limes einer konvergenten Folge eindeutig ist:

$x_n \to x_\infty$ und $x_n \to z \Longrightarrow x_\infty = z$.

Beweis. Wir nehmen $x_\infty \neq z$ an und betrachten $\varepsilon = |x_\infty - z|/2$. Dann gibt es $N, M \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_\infty| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und $|x_n - z| < \varepsilon$ für alle $n \geq M$. Für $n = \max\{N, M\}$ gelten dann beide Ungleichungen, und mit der Dreiecksungleichung folgt der Widerspruch

$$2\varepsilon = |x_\infty - z| \leq |x_\infty - x_n| + |x_n - z| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \qquad \square$$

(h) Um die Konvergenz einer konkreten Folge mittels der Definition nachzuweisen, muss man den Limes schon kennen oder erraten. Das kann leicht sein (wie im Fall $x_n = 1/n$), von moderater Schwierigkeit (wie in den wichtigen Beispielen 4.4), sehr schwierig (wie im Fall $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1/k^2$) oder unmöglich (bisher kennt niemand den Grenzwert der Folge $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1/k^3$).

Beim Nachweis der Konvergenz konkreter Folgen sollte man stets zu vermeiden versuchen, die Defintion anzuwenden, und stattdessen Kriterien wie im folgenden Satz benutzen, um Probleme auf bekannte Beispiele zurückzuführen.

[†]Die Bezeichnung x_∞ für den Grenzwert ist suggestiv aber nicht zwingend und noch nicht einmal sehr verbreitet. Günstig ist jede Bezeichnung, die die Zugehörigkeit zu der Folge x in Erinnerung ruft, also zum Beispiel ξ als griechisches Pendant zu x. In der Literatur findet man leider oft auch die Bezeichnung x für den Grenzwert, was allerdings logisch ziemlich fragwürdig ist, wenn x der Name der Folge ist.

[‡]Das ist das sogenannte Archimedische Prinzip, das man zum Beispiel so beweist: Weil $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht ist, gibt es $N, M \in \mathbb{N}$ mit $1/\varepsilon < N/M < 1/\varepsilon + 1$. Dann ist $N > 1/\varepsilon$.

(i) Eine Folge $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, falls $\sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$, das heißt gemäß 3.8(b), dass $\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. Für $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist dies äquivalent dazu, dass $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben und nach unten beschränkt ist.

4.3 Satz.
Seien $x, y, z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ drei Folgen und $x_\infty, y_\infty \in \mathbb{C}$.

(a) $x_n \to x_\infty$ und $y_n \to y_\infty$ impliziert $x_n + y_n \to x_\infty + y_\infty$ und $x_n y_n \to x_\infty y_\infty$, und falls außerdem $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ auch $x_n/y_n \to x_\infty/y_\infty$.

(b) $x_n \to x_\infty \implies x$ beschränkt.

(c) $x_n \to 0$, und y beschränkt $\implies x_n y_n \to 0$.

(d) z konvergiert genau dann, wenn $(\Re z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\Im z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide konvergieren, und dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \Re z_n + i \lim\limits_{n\to\infty} \Im z_n$.

*(e) Sind $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{R}$ mit $x_n \le y_n \le z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und konvergieren x und z gegen den selben Limes, so konvergiert auch y gegen diesen Limes (*EINSCHLIESSUNGSKRITERIUM.*)*

BEWEIS.

(b) Zu $\varepsilon = 1$ gilt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_\infty| < 1$ für alle $n \ge N$, so dass $|x_n| \le |x_n - x_\infty| + |x_\infty| < 1 + |x_\infty|$ für $n \ge N$. Damit folgt $\sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} \le \max\{1 + |x_\infty|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|\}$.

(c) Sei $c = \sup\{|y_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist dann auch $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/(c+1) > 0$, und daher gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < \tilde{\varepsilon}$ für alle $n \ge N$. Für diese $n \ge N$ gilt dann $|x_n y_n| = |x_n|\,|y_n| \le \tilde{\varepsilon} c < \varepsilon$, so dass $x_n y_n \to 0$.

(a) Mit $\varepsilon > 0$ ist auch $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/2 > 0$, und daher gibt es $N, M \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_\infty| < \tilde{\varepsilon}$ für alle $n \ge N$ und $|y_n - y_\infty| < \tilde{\varepsilon}$ für alle $n \ge M$. Für $K = \max\{N, M\}$ und $n \ge K$ gelten dann beide Ungleichungen und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|(x_n + y_n) - (x_\infty + y_\infty)| \le |x_n - x_\infty| + |y_n - y_\infty| < \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Für die zweite Aussage schreiben wir in „genialer Weise“

$$x_n y_n - x_\infty y_\infty = (x_n - x_\infty) y_n + x_\infty (y_n - y_\infty)$$

Wegen $x_n - x_\infty \to 0$ und $y_n - y_\infty \to 0$ konvergieren nach (b) und (c) beide Summanden gegen 0, also auch $x_n y_n - x_\infty y_\infty$ wegen der schon bewiesenen Aussage. Also folgt $x_n y_n \to x_\infty y_\infty$.

Für die Aussage über Quotienten müssen wir noch $1/y_n \to 1/y_\infty$ beweisen, wozu es wegen

$$1/y_n - 1/y_\infty = (y_\infty - y_n) \frac{1}{y_n y_\infty}$$

und (c) zu zeigen reicht, dass $\Big(1/(y_n y_\infty)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Wegen $y_\infty \neq 0$ ist $\varepsilon = |y_\infty|/2 > 0$, und es gilt $N \in \mathbb{N}$ mit $|y_n - y_\infty| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Für solche n folgt wegen $|y_\infty| \le |y_\infty - y_n| + |y_n|$ die Ungleichung $|y_n| \ge |y_\infty| - \varepsilon/2 = |y_\infty|/2$. Dies liefert

$$\sup\left\{\left|\frac{1}{y_n y_\infty}\right| : n \in \mathbb{N}\right\} \le \max\left\{\frac{2}{|y_\infty|^2}, \frac{1}{|y_1 y_\infty|}, \ldots, \frac{1}{|y_{N-1} y_\infty|}\right\}.$$

(d) Falls $z_n \to z_\infty$, so gilt $\Re z_n \to \Re z_\infty$, weil $|\Re z_n - \Re z_\infty| = |\Re(z_n - z_\infty)| \leq |z_n - z_\infty|$, und aus gleichem Grund gilt $\Im z_n \to \Im z_\infty$.

Andererseits folgt aus der Konvergenz von $\Re z_n$ und $\Im z_n$ die von $z_n = \Re z_n + i\Im z_n$ wegen (a) und der Konvergenz der konstanten Folge $y_n = i$.

(e) Für $x_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ gilt $|y_n - x_\infty| \leq \max\{|x_n - x_\infty|, |z_n - x_\infty|\}$, und dies impliziert $y_n \to x_\infty$. □

4.4 Beispiele

(a) Seien $a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q \in \mathbb{C}$ mit $a_p b_q \neq 0$, so dass der Nenner im folgenden Bruch stets $\neq 0$ ist. Die Folge

$$x_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$$

konvergiert genau dann, wenn $q \geq p$, und dann ist der Grenzwert $= 0$, falls $q > p$, und $= a_p/b_q$, falls $p = q$.

Beweis. Die Folge $y_n = \left(\sum\limits_{k=0}^{p} a_k/n^{p-k}\right) \Big/ \left(\sum\limits_{k=0}^{q} b_k/n^{q-k}\right)$ konvergiert wegen $1/n \to 0$ und Satz 4.3(a) gegen $a_p/b_q \neq 0$. Außerdem gilt $x_n = n^{p-q}y_n$. Falls $q \geq p$, folgt damit die Konvergenz gegen den angegebenen Grenzwert, und falls $p > q$, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und daher divergent. □

(b) Für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ gilt $\sqrt[n]{c} \to 1$.

Beweis. Wegen $\sqrt[n]{1/c} = 1/\sqrt[n]{c}$ reicht es, den Fall $c \geq 1$ zu beweisen. Wir müssen also zeigen, dass $y_n = \sqrt[n]{c} - 1$ gegen 0 konvergiert. Wegen $y_n \geq 0$ und des Binomialsatzes ist

$$c = (y_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y_n^k \geq n y_n.$$

Also gilt $0 \leq y_n \leq c/n$, und das Einschließungskriterium liefert wie gewünscht $y_n \to 0$. □

(c) $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Beweis. Wir zeigen, dass $y_n = \sqrt[n]{n} - 1$ gegen 0 konvergiert. Wie in (b) ist

$$n = (y_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y_n^k \geq \binom{n}{2} y_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} y_n^2,$$

was $y_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$ für alle $n \geq 2$ impliziert, also $0 \leq y_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Für $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$ gilt also $|y_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ (dieses N hat man natürlich durch Auflösen der Ungleichung $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$ gefunden). □

(d) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und alle $p \in \mathbb{N}_0$ gilt $n^p z^n \to 0$.

Das heißt also, dass z^n „schneller“ gegen 0 konvergiert als jede Potenz wächst.

Beweis. Für $z = 0$ ist die Folge konstant gleich 0, und andernfalls ist $|z| = \frac{1}{1+r}$ mit $r > 0$ (nämlich $r = \frac{1}{|z|} - 1$). Für alle $n > 2p$ ist

$$(1+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k \geq \binom{n}{p+1} r^{p+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p)}{p!} r^{p+1} \geq (n/2)^{p+1} r^{p+1}/p!$$

und damit folgt $|n^p z^n| \leq \frac{2^{p+1} p!}{r^{p+1}} \frac{1}{n} \to 0$. □

(e) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ und alle $p \in \mathbb{N}$ ist $\frac{z^n}{n^p}$ divergent.

Beweis. Andernfalls würden Beispiel (d) mit $\tilde{z} = 1/z$ und Satz 4.3(c) die Konvergenz von $1 = \left(n^p \frac{1}{z^n}\right) \frac{z^n}{n^p}$ gegen Null implizieren. □

4.5 Satz (Monotone Konvergenz).

(a) Eine monotone Folge $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist. Genauer gilt

$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, *falls x monoton wächst, und*

$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, *falls x monoton fällt.*

(b) Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt, so gibt es eine monoton wachsende Folge x in A mit $x \to \sup A$.

Beweis. (a) Weil konvergente Folgen nach Satz 4.3(b) stets beschränkt sind, müssen wir nur noch die Hinlänglichkeit zeigen. Seien dazu x monoton wachsend und $x_\infty = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $x_\infty - \varepsilon$ keine Majorante von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, so dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_\infty - \varepsilon < x_N$. Wegen der Monotonie folgt für alle $n \geq N$

$$x_\infty - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq x_\infty, \text{ also } |x_\infty - x_n| < \varepsilon.$$

Der Beweis für monoton fallende Folgen ist analog. Alternativ kann man auch den schon bewiesenen Fall auf $y_n = -x_n$ anwenden.

(b) Sei $s = \sup A$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $s - 1/n$ keine Majorante, so dass es $a_n \in A$ gibt mit $s - 1/n < a_n \leq s$. Also ist die durch $x_n = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$ definierte Folge monoton mit $x_n \to s$. □

Bemerkung

(a) Man schreibt manchmal kurz $x_n \nearrow x_\infty$ und $x_n \searrow x_\infty$, falls x monoton wächst beziehungsweise fällt und gegen x_∞ konvergiert.

(b) Für die Untersuchung der Monotonie kann man entweder die Differenzen $x_n - x_{n+1}$ untersuchen oder, falls alle Folgenglieder echt positiv sind, auch die Quotienten x_n/x_{n+1}.

(c) $x_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2$ konvergiert: Die Folge ist nämlich monton wachsend und beschränkt, weil

$$x_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Dass der Grenzwert $\pi^2/6$ ist, war ein lange Zeit ungelöstes Problem und wurde zuerst von Euler gezeigt.

4.6 Babylonisches Wurzelziehen
Seien $z > 0$, $x_0 \geq \sqrt{z}$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{z}{x_n}\Big)$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend mit $x_n \to \sqrt{z}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst induktiv $x_n \geq \sqrt{z}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ ist dies gerade vorausgesetzt und der Induktionsschritt folgt aus $x_n > 0$ und

$$x_{n+1}^2 - z = \frac{1}{4}(x_n^2 + 2z + z^2/x_n^2) - z = \frac{1}{4}(x_n^2 - 2z + z^2/x_n^2) = \frac{1}{4}(x_n - z/x_n)^2 \geq 0.$$

Als nächstes zeigen wir, dass die Folge monoton fällt:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}\Big(1 + \frac{z}{x_n^2}\Big) \leq \frac{x_n}{2}(1+1) = x_n.$$

Wegen des Satzes über monotone Kovergenz existiert also $x_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \sqrt{z}$. Wegen Satz 4.3(a) konvergiert dann $y_n = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{z}{x_n}\Big)$ gegen $\frac{1}{2}\Big(x_\infty + \frac{z}{x_\infty}\Big)$, aber andererseits gilt wegen $y_n = x_{n+1}$ auch $y_n \to x_\infty$. Die Eindeutigkeit des Grenzwerts liefert also

$$x_\infty = \frac{1}{2}\Big(x_\infty + \frac{z}{x_\infty}\Big) \text{ und damit } x_\infty^2 = z. \qquad \square$$

Man beachte die Logik der Argumentation: Die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ liefert mit dem allgemeinen Satz 4.5 die *Existenz* des Grenzwerts, und erst dann kann man ihn effektiv berechnen.

Geometrisch kann das Verfahren folgendermaßen interpretiert werden: x_n und z/x_n sind die Seitenlängen eines Rechtecks mit Flächeninhalt z. Um dieses Rechteck „quadratischer" zu machen, betrachtet man im nächsten Schritt das Rechteck dessen eine Seitenlänge x_{n+1} das Mittel der vorherigen Seitenlängen ist.

4.7 Cauchy-Folgen

(a) Eine Folge $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N \text{ gilt } |x_n - x_N| < \varepsilon.$$

(b) Man beachte, dass diese *Cauchy-Bedingung* nur von den Folgengliedern abhängt. Im Gegensatz dazu muss man bei der Konvergenz den Grenzwert kennen oder raten.

(c) $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \geq N \text{ gilt } |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Diese Formulierung wird meistens in der Literatur bevorzugt. Deren Hinlänglichkeit ist klar (mit $m = N$) und für die Notwendigkeit wenden wir für $\varepsilon > 0$ die Bedingung in (a) auf $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/2$ an. Für das zugehörige N und $n, m \geq N$ gilt dann $|x_n - x_N| < \tilde{\varepsilon}$ und $|x_m - x_N| < \tilde{\varepsilon}$, so dass wegen der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_N| + |x_m - x_N| < \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \text{ folgt.}$$

(d) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Für $x_n \to x_\infty$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_\infty| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$, was $|x_n - x_N| \leq |x_n - x_\infty| + |x_N - x_\infty| < \varepsilon$ impliziert. □

(e) Beispiel: Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist nämlich $|(-1)^N - (-1)^{N+1}| = 2$, so dass die Cauchy-Bedingung nicht gilt. Ein Beweis der Divergenz ohne das Cauchy-Kriterium ist deutlich unangenehmer, weil man jede Zahl als potentiellen Grenzwert ausschließen muss und dafür verschiedene Fälle unterscheiden muss.

Der folgende Satz ist von herausragender Bedeutung für die Mathematik:

4.8 Theorem (Folgenvollständigkeit von $\mathbb{C}$).
Jede Cauchy-Folge $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ konvergiert.

Beweis. Wegen $|\Re z| \leq |z|$ und $|\Im z| \leq |z|$ sind die Folgen der Real- bzw. Imaginärteile wiederum Cauchy-Folgen, und wegen Satz 4.3(d) reicht es, die Konvergenz reeller Cauchy-Folgen $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zu beweisen. Wir zeigen zunächst, dass x beschränkt ist: Das zu $\varepsilon = 1$ gehörige N aus der Cauchy-Bedingung liefert

$$|x_n| \leq |x_n - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N|$$

für alle $n \geq N$ und damit

$$\sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} \leq \max\{1 + |x_N|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|\}.$$

Wir definieren nun $s_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$. Wegen $A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$ ist s_n monoton fallend und beschränkt, und wegen des Satzes über monotone Konvergenz existiert $s_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Wir zeigen nun $x_n \to s_\infty$.

Sei also $\varepsilon > 0$. Wegen $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/3 > 0$ liefern die Cauchy-Bedingung 4.7(c) bzw. die Konvergenz $N, M \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_m| < \tilde{\varepsilon} \text{ für alle } n, m \geq N \text{ und } |s_n - s_\infty| < \tilde{\varepsilon} \text{ für alle } n \geq M.$$

Sei $K = \max\{N, M\}$. Weil $s_K - \varepsilon$ echt kleiner als $s_K = \sup\{x_m : m \geq K\}$ ist, gibt es $m \geq K$ mit $s_K - \tilde{\varepsilon} < x_m$, was wegen $x_m \leq s_K$ die Ungleichung $|s_K - x_m| < \tilde{\varepsilon}$ impliziert. Für alle $n \geq K$ erhalten wir durch zweifache Anwendung der Dreiecksungleichung

$$|x_n - s_\infty| \leq |x_n - x_m| + |x_m - s_K| + |s_K - s_\infty| < \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} = \varepsilon.$$ □

4.9 Beispiele

(a) Die Folge $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k/k^3$ konvergiert.

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 1/\varepsilon$. Dann gilt für $n \geq N$

$$|s_n - s_N| = \left| \sum_{k=N+1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^3} \right| \leq \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=N+1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{N+1} - \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

□

(b) Seien $z_n \in \mathbb{C}$ und $r_n > 0$ mit $r_n \to 0$ sowie $K_n = \{\omega \in \mathbb{C} : |z_n - \omega| \leq r_n\}$ Kreise in $\mathbb{C}$. Falls $K_{n+1} \subseteq K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Beweis. Wegen $z_n \in K_N$ für alle $n \geq N$ ist $|z_n - z_N| \leq r_N$, und dies impliziert, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Sei $z_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Für festes $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq m$ ist $z_n \in K_n \subseteq K_m$, so dass $|z_m - z_n| \leq r_m$. Wegen $z_n \to z_\infty$ folgt dann $|z_m - z_\infty| \leq r_m$, also $z_\infty \in K_m$. □

4.10 Limes superior und inferior

(a) Für eine beschränkte Folge $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ heißt

$$\limsup x = \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\}$$

der *Limes superior* der Folge x (den haben wir im Beweis zu Satz 4.8 benutzt). Ist x nicht nach oben beschränkt, so setzen wir $\limsup x = \infty$, und falls die Folge $s_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ nicht nach unten beschränkt ist, vereinbaren wir $\limsup x = -\infty$.

(b) Für $a \in \mathbb{R}$ gilt $a = \limsup x \iff$ Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\{n \in \mathbb{N} : x_n > a + \varepsilon\}$ endlich und $\{n \in \mathbb{N} : x_n > a - \varepsilon\}$ unendlich.

Beweis. Seien $s_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ und $s_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \limsup x$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $s_n - s_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, und wegen $x_n \leq s_n$ ist dann $x_n \leq s_\infty + \varepsilon$ für alle $n \geq N$, so dass $\{n \in \mathbb{N} : x_n > s_\infty + \varepsilon\}$ endlich ist.

Andererseits ist $s_\infty \leq s_n$ und daher $s_\infty - \varepsilon < s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt $s_\infty - \varepsilon$ ist keine Majorante von $\{x_k : k \geq n\}$, so dass es ein $k \geq n$ gibt mit $x_k > s_\infty - \varepsilon$. Die Menge $\{k \in \mathbb{N} : x_k > s_\infty - \varepsilon\}$ ist also unendlich.

Erfüllt nun a die Bedingungen für alle $\varepsilon > 0$, so zeigen wir $s_n \to a$. Ist N das größte Element der ersten Menge, so gilt $x_n \leq a+\varepsilon$ für alle $n \geq N+1$ und damit $s_n \leq a+\varepsilon$ für alle $n \geq N+1$. Andererseits ist $s_n \geq a - \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen der Unendlichkleit der zweiten Menge, so dass $a - \varepsilon \leq s_n \leq a + \varepsilon$ für alle $n \geq N + 1$. □

(c) Analog definieren wir für eine beschränkte Folge $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ den *Limes inferior*

$$\liminf x = \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geq n\}.$$

Ist x nicht nach unten beschränkt, so vereinbaren wir $\liminf x = -\infty$, und falls die Folge $\inf\{x_k : k \geq n\}$ nicht nach oben beschränkt ist, schreiben wir $\liminf x = \infty$.

(d) Beispiele: Es ist $\liminf\limits_{n\to\infty}(-1)^n = -1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(-1)^n = 1$ sowie $\liminf\limits_{n\to\infty}(-n)^n = -\infty$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(-n)^n = \infty$. Außerdem ist $\liminf\limits_{n\to\infty} n^2 = \limsup\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

(e) Es gilt $\liminf\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

(f) Für $b \in \mathbb{R}$ gilt $b = \liminf x \iff$ für alle $\varepsilon > 0$ ist $\{n \in \mathbb{N} : x_n < b - \varepsilon\}$ endlich und $\{n \in \mathbb{N} : x_n < b + \varepsilon\}$ unendlich.

(g) Eine Folge $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ konvergiert genau dann, wenn $\limsup x = \liminf x \in \mathbb{R}$, und dann ist $\lim x = \limsup x$.

Beweis. Falls $x_n \to x_\infty$, sind $\{n \in \mathbb{N} : x_n < x_\infty - \varepsilon\}$ und $\{n \in \mathbb{N} : x_n > x_\infty + \varepsilon\}$ beide endlich für alle $\varepsilon > 0$ (auch mit $\le$ statt $<$), und daher sind $\{n \in \mathbb{N} : x_n > x_\infty - \varepsilon\}$ und $\{n \in \mathbb{N} : x_n < x_\infty - \varepsilon\}$ beide unendlich. Mit (b) und (e) folgt $x_\infty = \limsup x = \liminf x$. Sind andererseits $a = b = \limsup x = \liminf x$, so sind für jedes $\varepsilon > 0$ die Mengen $\{n \in \mathbb{N} : x_n < b - \varepsilon\}$ und $\{n \in \mathbb{N} : x_n > a + \varepsilon\}$ endlich, so dass $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - b| > \varepsilon\}$ endlich ist. Daher gilt $x_n \to b$. $\square$

4.11 Reihen

(a) Seien $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ eine Folge und $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Falls diese Folge der *Partialsummen* konvergiert, schreibt man $s_\infty = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ für den Grenzwert und nennt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ eine *konvergente Reihe*. Falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, sagt man, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *divergiert* (was logisch etwas bizarr ist, weil in diesem Fall das Symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ keine konkrete Bedeutung hat).

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die *geometrische Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ genau dann, wenn $|z| < 1$ und dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Beweis. Dies folgt aus $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ für $z \neq 1$ (für $|z| = 1$ siehe Teil (f)). $\square$

(c) Jede Folge $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ist eine Partialsummenfolge $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})$ mit $y_0 = 0$. Also liefert jedes Konvergenzkriterium für Reihen auch eines für Folgen und umgekehrt. Die nächsten beiden Aussagen folgen unmittelbar aus dem Satz über monotone Konvergenz und dem Cauchy-Kriterium:

(d) Falls $x_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ genau dann, wenn die Folge $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ nach oben beschränkt ist.

(e) Cauchy-Kriterium: Für $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, m \ge n \ge N \;\text{ gilt } \left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right| < \varepsilon.$$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergent $\Rightarrow x_n \to 0$.

Dies folgt mit $m = n$ aus dem Cauchy-Kriterium.

(g) Die *harmonische Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Beweis. Wegen $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ ist das Cauchy-Kriterium nicht erfüllt. □

(h) Falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ beide konvergieren, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ax_n + by_n) = a\sum_{n=1}^{\infty} x_n + b\sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Dies folgt unmittelbar aus Satz 4.3(a).

4.12 Satz (Vergleichskriterien).
Seien $x, y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n| \leq |y_n|$ für alle $n \geq N$.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|$ konvergiert $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert (Majorantenkriterium)

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ divergiert $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|$ divergiert (Minorantenkriterium)

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ gilt es wegen des Cauchy-Kriteriums $M \in \mathbb{N}$, so dass $\sum\limits_{k=n}^{m} |y_k| < \varepsilon$ für alle $m \geq n \geq N$. Für alle $m \geq n \geq \max\{M, N\}$ folgt dann $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} x_k\right| \leq \sum\limits_{k=n}^{m} |x_k| \leq \sum\limits_{k=n}^{m} |y_k| < \varepsilon$, so dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert. Die Aussage (b) ist äquivalent zu (a). □

4.13 Absolute Konvergenz

(a) Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ konvergiert. Wegen 4.12 konvergiert dann auch die Reihe selbst.

(b) Für absolut konvergente Reihen gilt die Dreiecksungleichung $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

Beweis. Für $s_m = \sum\limits_{n=1}^{m} x_n$ liefert die Dreiecksungleichung $|s_m| \leq \sum\limits_{n=1}^{m} |x_n| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Wegen $s_m \to s_\infty = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ gilt die entsprechende Ungleichung auch für s_∞. □

(c) Warnung: Die Konvergenz einer Reihe impliziert im Allgemeinen nicht die absolute Konvergenz!

Ein Beispiel dafür ist die *alternierende harmonische Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Diese Reihe erfüllt nämlich das Cauchy-Kriterium, weil

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k}{k}\right| = \left|\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \cdots\right| < \frac{1}{n}.$$

(d) Absolut konvergente Reihen verhalten sich sehr ähnlich wie endliche Summen, zum Beispiel kann man die Summationsreihenfolge beliebig verändern (was im folgenden Satz bewiesen wird). Konvergente aber nicht absolut konvergente nennt man auch *bedingt konvergent*, und für solche Reihen gibt es sehr seltsame Phänomene, wie der Riemannsche Umordnungssatz im Teil (b) der folgenden Nummer.

4.14 Satz (Umordnungssatz).

(a) Seien $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *eine absolut konvergente Reihe und* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine Bijektion. Dann konvegiert auch* $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$, *und es gilt* $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

(b) Seien $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *eine bedingt konvergente Reihe mit* $x_n \in \mathbb{R}$ *und* $a, b \in [-\infty, \infty]$ *mit* $a \le b$. *Dann gibt es eine Bijektion* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *so dass*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)} = a \text{ und } \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)} = b.$$

Beweis. (a) Seien $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ und $s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es wegen $s_n \to s_\infty$ und der absoluten Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$(1) \quad |s_n - s_\infty| < \varepsilon/2 \text{ für alle } n \ge N \text{ und } (2) \sum_{k=N}^{\infty} |x_k| < \varepsilon/2.$$

Weil φ eine Bijektion ist, gibt es $M \in \mathbb{N}$ mit $\{1, \ldots, N\} \subseteq \{\varphi(1), \ldots, \varphi(M)\}$. Für $m \ge M$ ist dann

$$\left|\sum_{k=1}^{m} x_{\varphi(k)} - s_\infty\right| = \left|s_N - s_\infty + \sum_{\substack{k=1\\ \varphi(k)>N}}^{m} x_{\varphi(k)}\right| \le |s_n - s_\infty| + \sum_{\substack{k=1\\ \varphi(k)>N}}^{m} |x_{\varphi(k)}| < \varepsilon.$$

(b) Dieser Beweis ist in einigen Details ziemlich technisch, so dass wir uns damit begnügen, die Konstruktion von φ im Fall $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ anzugeben. Die Idee des Beweises ist, erst soviele negative Summanden auszuwählen, bis die Partialsumme $< a$ ist, dann soviele positive Summanden, bis die Partialsumme $> b$ ist, dann wieder negative bis die Partialsumme $< a$ ist und so fort. Mit $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \le 0\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n > 0\}$ setzen wir also $\varphi(1) = \min A$, und falls $\varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ schon konstruiert sind, definieren wir $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$ und $\varphi(n+1) = \begin{cases} \min A \setminus \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}, & \text{falls } (\varphi(n) \in A \text{ und } s_n > a) \text{ oder } s_n > b \\ \min B \setminus \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}, & \text{sonst} \end{cases}$ □

Die Anwendung des Vergleichskriteriums auf die geometrische Reihe liefert zwei einfache und für die Praxis sehr wichtige Tests für die absolute Konvergenz.

4.15 Satz (Quotienten- und Wurzelkriterium).

(a) Falls es $c < 1$ und $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n \neq 0$ und $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq c$ für alle $n \geq N$, dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut.

(b) Falls $x_n \neq 0$ und $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ divergent.

(c) Falls es $c < 1$ und $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\sqrt[n]{|x_n|} \leq c$ für alle $n \geq N$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut konvergent.

(d) Falls $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ divergent.

Zusatz. Falls $q = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ existiert, so gelten

- $q < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert absolut
- $q > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ divergiert.

Ist $s = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$, so gelten

- $s < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert absolut
- $s > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ divergiert.

Im Fall $q = 1$ oder $s = 1$ sind sowohl Konvergenz als auch Divergenz möglich. Inder Praxis ist das Quotientenkriterium oft leichter anzuwenden, aber das Wurzelkriterium ist präsizer.

Beweis.

(a) Durch Induktion folgt für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|x_n| \leq c^{n-N}|x_N| = kc^n$ mit der Konstanten $k = c^{-N}|x_N|$. Der Vergleich mit der geometrischen Reihe liefert also die absolute Konvergenz.

(b) Falls $|x_{n+1}/x_n| \geq 1$ für alle $n \geq N$ folgt induktiv $|x_n| \geq |x_N|$, so dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0 konvergiert. Nach 4.11 (f) ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ divergiert.

(c) Wegen der Monotonie der Potenz gilt $|x_n| \leq c^n$ für $n \geq N$, und wiederum der Vergleich mit der geometrischen Reihe liefert die absolute Konvergenz.

(d) $|x_n| \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ impliziert, dass x nicht gegen 0 konvergiert.

Die Zusätze in der Bemerkung folgen direkt aus dem Satz: Ist $q < 1$, so gibt es $q < c < 1$, und mit $\varepsilon = c - q$ folgt aus der Konvergenz $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < c$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Die anderen Fälle erhält man mit dem gleichen Argument. $\square$

4.16 Beispiele

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut konvergent.

Für $z = 0$ ist das klar, und für $z \neq 0$ wenden wir das Quotientenkriterium auf $x_n = z^n/n!$ an: Es gilt $|x_{n+1}/x_n| = |z|/(n+1) \to 0$ und daher konvergiert die Reihe absolut. Man könnte auch versuchen das Wurzelkriterium anzuwenden, aber der Nachweis $1/\sqrt[n]{n!} \to 0$ ist deutlich schwieriger. Wir definieren nun die wichtigste Funktion der Mathematik:

(b) Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ heißt *Exponentialfunktion.*

(c) Für $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ und $z \in \mathbb{C}$ heißt eine Reihe der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine *Potenzreihe*, und

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

heißt *Konvergenzradius* der Reihe (die Formel wird oft nach Cauchy und Hadamard benannt), dabei vereinbaren wir $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$. Das Wurzelkriterium liefert in dieser Situation:

(d) Für $|z| < R$ konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut, und für $|z| > R$ divergiert die Potenzreihe.

(e) Die Cauchy-Hadamard-Formel ist in der Praxis oft nicht leicht anzuwenden. Falls alle $a_n \neq 0$ und die Folge $|a_n/a_{n+1}|$ konvergiert, so gilt $R = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$. Dies folgt aus dem Quotientenkriterium.

(f) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ hat Konvergenzradius $e = \exp(1)$, weil $a_n/a_{n+1} = \frac{n!}{n^n} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = (1 + \frac{1}{n})^n$ und wir jetzt zeigen, dass diese Folge gegen $\exp(1)$ konvergiert:

4.17 Satz.
Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to \exp(z)$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $s_n = \sum\limits_{k=c}^{n} \frac{z^k}{k!}$ und

$$w_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{n}.$$

Um die Differenz $|s_n - w_n|$ abzuschätzen, zeigen wir durch Induktion nach $k \in \mathbb{N}$ für $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ mit $|a_j| \leq 1$ und $|b_j| \leq 1$ die Ungleichung $\left|\prod\limits_{j=0}^{k-1} a_j - \prod\limits_{j=0}^{k-1} b_j\right| \leq \sum\limits_{j=0}^{k-1} |a_j - b_j|$. Für $k = 1$ ist das klar, und der Induktionsschritt folgt aus

$$\prod_{j=0}^{k} a_j - \prod_{j=0}^{k} b_j = \left(\prod_{j=0}^{k-1} a_j - \prod_{j=0}^{k-1} b_j \right) a_k + (a_k - b_k) \prod_{j=0}^{k-1} b_j$$

mit Hilfe der Dreiecksungleichung. Für $a_j = \frac{n-j}{n}$ und $b_j = 1$ folgt

$$|w_n - s_n| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} \frac{(k-1)k}{2} = \frac{|z|^2}{2n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|z|^k}{k!}$$

Also gilt $|w_n - s_n| \le \frac{|z|^2}{2n} \exp(|z|)$, so dass $w_n - s_n \to 0$. Aus $s_n \to \exp(z)$ folgt also auch $w_n \to \exp(z)$. □

4.18 Satz (Cauchy-Produkt).
Seien $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen, von denen mindestens eine absolut konvergiert. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = AB.$$

Beweis. Wegen $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$ können wir annehmen, dass die Reihe der a_n absolut konvergiert. Wir schreiben $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ und $\beta_n = B - B_n$. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt dann mit $M = \{(n,k) \in \{0,\dots,N\}^2 : k \le n\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} &= \sum_{(n,k)\in M} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=k}^{N} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{\ell=0}^{N-k} b_\ell \\
&= \sum_{k=0}^{N} a_k B_{N-k} = A_N B - \sum_{k=0}^{N} a_k \beta_{N-k}.
\end{aligned}$$

Wir müssen also noch $r_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{n-k} \to 0$ zeigen. Für $c > \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + \sup\{|\beta_n| : n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|\beta_n| < \varepsilon/2c$ für alle $n \ge N$ und $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \varepsilon/2c$. Für $n \ge 2N$ und $k \le N$ ist dann $n - k \ge N$, und wir erhalten

$$|r_n| \le \sum_{k=0}^{N} |a_k|\,|\beta_{n-k}| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k|\,|\beta_{n-k}| \le \frac{\varepsilon}{2c} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + c \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

4.19 Korollar.
Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien* R_a *beziehungsweise* R_b*. Dann gilt für alle* $|z| < \min\{R_a, R_b\}$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

4.20 Die Exponentialfunktion

(a) Für $z \in \mathbb{C}$ hatten wir in 4.16 mit dem Quotientenkriterium die absolute Konvergenz von $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ gezeigt. Statt $\exp(z)$ schreibt man oft auch e^z.

(b) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt die Fundamentalidentität $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.

Beweis. $\exp(z)\exp(w) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)$. □

(c) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|\exp(z)| = \exp(\Re z) > 0$.

Beweis. Wegen $s_n \to s_\infty \Rightarrow \bar{s}_n \to \bar{s}_\infty$ gilt $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$. Damit folgt

$$|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z+\bar{z}) = \exp(2\Re z).$$

Für $\tilde{z} = z/2$ liefert dies $\exp(\Re z) \geq 0$, und weil $\exp(2\Re z) = \exp(\Re z + \Re z) = \exp(\Re z)^2$, folgt $|\exp(z)| = \exp(\Re z)$ aus der Eindeutigkeit der Wurzel. Schließlich ist $\exp(z) \neq 0$, weil $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1$. □

(d) Für alle $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $\left|\exp(z) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \frac{|z|^n}{n!}\exp(|z|)$.

Beweis.

$$\left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!}\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = \frac{|z|^n}{n!}\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{n!}{(\ell+n)!}|z|^\ell \leq \frac{|z|^n}{n!}\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{|z|^\ell}{\ell!} = \frac{|z|^n}{n!}e^{|z|},$$

weil $\frac{(\ell+n)!}{\ell!n!} = \binom{\ell+n}{\ell} \geq 1$. □

(e) $e = \exp(1)$ ist irrational.

Beweis. Andernfalls könnte man $e = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $n > e$ schreiben. Dann ist $\alpha = n!e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \in \mathbb{Z}$, aber wegen (d) für $n+1$ gilt $0 < |\alpha| < \frac{e}{n+1} < 1$. □

(f) $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$ ist streng monoton wachsend.

Beweis. für $x < y$ ist $\frac{\exp(y)}{\exp(x)} = \exp(y-x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(y-x)^n}{y!} > 1$. □

4.21 Die Zeta-Funktion

(a) Bisher haben wir Potenzen y^p für $y \geq 0$ nur für $p \in \mathbb{Q}$ definiert. Im Vorgriff auf Kapitel 5 benutzen wir für $p, q \in \mathbb{R}$ folgende Regeln $y^p y^q = y^{p+q}$ und $(y^p)^q = y^{pq}$.

(b) Wir wollen nun die Konvergenz der *Riemannschen Reihen* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ untersuchen. Qotienten- und Wurzelkriterium helfen hier nicht. Deshalb ein Trick, der auf Cauchy zurückgeht:

(c) Für eine monoton fallende Folge x mit $x_n \geq 0$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ konvergiert (Verdichtungskriterium).

Beweis. Seien $s_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$ und $r_m = \sum_{n=0}^{m} 2^n x_{2^n}$. Weil x monoton fällt, gilt

$$s_{2^{m+1}} = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \cdots \leq r_m, \text{ und andererseits}$$

$$s_{2^m} = x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + \cdots + x_8) + \cdots \geq x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_8 + \cdots \geq \frac{1}{2} r_m.$$

Wegen der Monotonie von s_m und r_m folgt daraus, dass $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ genau dann beschränkt ist, wenn $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, und der Satz über monotone Konvergenz liefert die Behauptung. □

(d) Für $p \geq 0$ konvergiert $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ genau dann, wenn $p > 1$.

Beweis. Die verdichtete Reihe ist eine geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$, also genau dann konvergent, wenn $2^{1-p} < 1$. □

(e) Die in (d) definierte *Riemannsche Zeta-Funktion* spielt eine herausragende Rolle in vielen Bereichen der Mathematik und insbesondere der Zahlentheorie.

4.22 Satz (Abel).
Seien $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, so dass eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert und* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ *konvergiert,*

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert und b ist monoton und beschränkt,*

(c) $\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| : n \in \mathbb{N} \right\}$ *ist nach oben beschränkt und b konvergiert monoton gegen 0.*

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konvergent.*

Beweis. Seien $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Dann gilt für alle $n \le m$ die Abelsche partielle Summationsformel

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = A_m b_m - A_{n-1} b_n + \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Dies folgt wegen $a_k = A_k - A_{k-1}$ aus

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m} A_k b_k - \sum_{k=n}^{m} A_{k-1} b_k = \sum_{k=n}^{m} A_k b_k - \sum_{\ell=n-1}^{m-1} A_\ell b_{\ell+1}.$$

Ist nun (a) erfüllt, so folgt aus

$$|b_n - b_m| = \Big| \sum_{k=n}^{m-1} b_k - b_{k+1} \Big| \le \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}|$$

zunächst, dass b eine Cauchy-Folge ist und daher konvergiert. Das Cauchy-Kriterium für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ folgt dann aus

$$\Big| \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \Big| \le \sum_{k=n}^{m-1} |A_k|\, |b_k - b_{k+1}| \le c \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}|$$

mit $c = \sup\{|A_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Die Bedingung (b) impliziert die Bedingung (a), weil für monotone Folgen $\sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = |b_1 - b_{n+1}|$ wegen des Satzes über monotone Folgen konvergiert. Im Fall (c) erhält man

$$\Big| \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \Big| \le c \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| = c|b_m - b_n|$$

für jede Majorante c von $\{|A_n| : n \in \mathbb{N}\}$, und wegen $b_n \to 0$ gilt wieder die Cauchy-Bedingung. □

4.23 Anwendungen

(a) Leibniz-Kriterium: Für jede monotone Nullfolge x ist $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ konvergent.

Beweis. Dies folgt mit $a_n = (-1)^n$ und $b_n = x_n$ aus der Bedingung (c) im Satz 4.21. □

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / n^p$ konvergiert für alle $p > 0$.

(c) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1, so dass die Koeffizienten c_n reel sind und monoton gegen 0 konvergieren. Dann konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $z \ne 1$.

Beweis. Dies folgt wiederum aus der Bedingung (c) mit $a_n = z^n$ und $b_n = c_n$, weil

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} z^k\Big| = \Big|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\Big| \le \frac{2}{|1 - z|}. \qquad \square$$

KAPITEL 5

Stetigkeit

5.1 Metrische Räume

(a) Bei vielen Aussagen des vierten Kapitels haben wir nur einen einzigen Aspekt reeller und komplexer Zahlen benutzt, nämlich die Dreiecksungleichung für den Betragsabstand $d(x,y) = |x-y|$. Weil dies in diesem Kapitel ähnlich sein wird, definieren wir zunächst allgemeine Abstandsfunktionen.

(b) Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ (mit $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\}$) heißt eine *Metrik auf* X, falls für alle $x, y, z \in X$ folgende Bedingungen gelten:
(M1) $x = y \Longleftrightarrow d(x,y) = 0$,
(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie) und
(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung).
In dieser Situation heißt das Paar (X,d) ein *metrischer Raum*, und die Zahl $d(x,y)$ heißt Abstand zwischen x und y. Für $x \in X$ und $r \geq 0$ heißen

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\} \text{ und } \overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$$

offene bzw. *abgeschlossene Kugel* mit Mittelpunkt x und Radius r. Falls d nicht durch den Kontext klar ist, schreiben wir gelegentlich auch $B_d(x,r)$ oder $B_X(x,r)$ statt $B(x,r)$.

(c) Sind $A \subseteq X$ und d eine Metrik auf X, so ist $d_A = d|_{A \times A}$ eine Metrik auf A. Ist $A \subseteq \mathbb{C}$, so betrachten wir (sofern nicht anderes gesagt wird) immer die vom Betrag erzeugte Metrik $d(x,y) = |x-y|$. Die Kugeln $B_{\mathbb{R}}(x,r) =]x-r, x+r[$ und $B_{\mathbb{C}}(x,r) = \{y \in \mathbb{C} : |x-y| < r\}$ sind dann reelle Intervalle beziehungsweise Kreisscheiben in $\mathbb{C}$.

(d) Ein exotisches Beispiel ist die *diskrete Metrik* $\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{falls } x = y \end{cases}$ auf einer Menge X. Hier sind die Kugeln immer entweder einelementig, also sehr klein, oder gleich X, also sehr groß. Insbesondere sind $B_\delta(x,1) = \{x\}$ und $\overline{B}_\delta(x,1) = X$ sehr unterschiedlich.

(e) Für $x \in \mathbb{C}^n$ erfüllt die *euklidische Norm* $\|x\|_2 = \Big(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^2\Big)^{1/2}$ die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\sum\limits_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ und die Dreiecksungleichung $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$, und $d_2(x,y) = \|x-y\|_2$ ist eine Metrik auf $\mathbb{C}^n$.

Beweis. Durch Betrachten von $\tilde{x}_k = x_k / \|x_k\|_2$ und $\tilde{y}_k = y_k / \|y_k\|_2$ sieht man, dass es reicht die Cauchy-Schwarz-Ungleichung im Fall $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ zu zeigen, und dies folgt durch Aufsummieren aus

$$0 \leq \Big(|x_k| - |y|_k\Big)^2 = |x_k|^2 - 2|x_k y_k| + |y_k|^2.$$

Die Dreiecksungleichung erhalten wir damit aus

$$\|x+y\|_2^2 \le \|x\|_2^2 + 2\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| + \|y\|_2^2 \le \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = \Big(\|x\|_2 + \|y\|_2\Big)^2.$$

Die Bedingungen (M1) und (M2) für d_2 sind klar, und (M3) folgt aus

$$d_2(x,z) = \|(x-y)+(y-z)\|_2 \le \|x-y\|_2 + \|y-z\|_2. \qquad \square$$

(f) Für eine Menge $I \neq \emptyset$ seien

$$\ell_\infty(I) = \big\{ f : I \to \mathbb{C} : \{|f(t)| : t \in I\} \text{ nach oben beschränkt } \big\}$$

die Menge der *beschränkten Funktionen* auf I, und für $f \in \ell_\infty(I)$ sei

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in I\}.$$

Dann gilt $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ für alle $f, g \in \ell_\infty(I)$, und $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$ ist eine Metrik auf $\ell_\infty(I)$. Für $f \in \ell_\infty(I)$ und $r \ge 0$ gilt

$$\overline{B}(f,r) = \{g \in \ell_\infty(I) : |f(t) - g(t)| \le r \text{ für alle } t \in I\}.$$

Beweis. Für alle $t \in I$ gilt $|f(t) + g(t)| \le |f(t)| + g(t)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ und damit $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Dies impliziert die Bedingung (M3) für d_∞. $\square$

5.2 Stetigkeit

(a) Seien (X,d) und (Y,d) zwei metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\xi \in X$. Die Abbildung f heißt stetig in ξ, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X \text{ gilt } \big(d(\xi,x) < \delta \Longrightarrow D(f(\xi), f(x)) < \varepsilon\big).$$

(b) Stellt man sich $f : X \to Y$ als eine Maschine vor, so bedeutet die Stetigkeit in $\xi \in X$, dass es für jede Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ eine Inputtoleranz $\delta > 0$ gibt, so dass jeder Input x, der die Toleranz δ einhält, zu einem Output mit Fehler $< \varepsilon$ führt.

(c) Jede der folgenden Bedingungen ist äquivalent zur Stetigkeit in $\xi \in X$:
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ so dass $f(B(\xi,\delta)) \subseteq B(f(\xi),\varepsilon)$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ so dass $f(\overline{B}(\xi,\delta)) \subseteq \overline{B}(f(\xi),\varepsilon)$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ so dass $B(\xi,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(\xi),\varepsilon))$

Nennt man eine Menge $U \subseteq X$ *Umgebung von* ξ, falls es $r > 0$ mit $B(\xi, r) \subseteq U$ gibt, so ist eine weitere äquivalente Bedingung
- Das Urbild unter f jeder Umgebung von $f(\xi)$ ist eine Umgebung von ξ.

(d) Sind $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$ eine Abbildung, so heißt f stetig auf A, falls f als Abbildung von (A, d_A) nach (Y, D) in jedem Punkt $\xi \in A$ stetig ist, das heißt

$$\forall \xi \in A, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \text{ gilt } (d(\xi,x) < \delta \Longrightarrow D(f(\xi), f(x)) < \varepsilon).$$

Warnung: Ist $f : X \to Y$ stetig in jedem $\xi \in A$, so ist $f|_A : A \to Y$ stetig auf A, aber die umgekehrte Implikation gilt nicht (z. B. $A = \{\xi\}$)

.

(e) Beispiele.
- Konstante Abbildungen sind überall stetig ($\delta = 1$).

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x/|x| & , \quad \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{falls } x = 0 \end{cases}$ ist stetig in jedem $\xi \neq 0$ und unstetig in 0.
- $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist in jedem Punkt stetig.

Beweis. In 4.20(d) haben wir $|\exp(z) - 1| \leq |z| \exp(|z|)$ gezeigt. Für alle $\xi, x \in \mathbb{C}$ folgt damit

$$\begin{aligned} |\exp(\xi) - \exp(x)| &= |\exp(\xi)|\,|\exp(x - \xi) - 1| \leq |x - \xi|\,|\exp(\xi)| \exp(|x - \xi|) \\ &\leq |x - \xi|\,|\exp(\xi)| e = |x - \xi| \exp(\Re\xi + 1) \end{aligned}$$

falls $|x - \xi| \leq 1$. Für $\varepsilon > 0$ und $\delta = \min\{1, \varepsilon / |\exp(\Re\xi + 1)\}$ folgt dann

$$|\exp(\xi) - \exp(x)| < \varepsilon \text{ für alle } |\xi - x| < \delta.$$

□

(f) Eine Folge $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ heißt (bezüglich der Metrik d) konvergent gegen $x_\infty \in X$, falls $d(x_\infty, x_n) \to 0$. In diesem Fall schreibt man $x_n \to x_\infty$ oder $x_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Letztere Schreibweise ist gerechtfertigt, weil genau wie in 4.2 (g) aus der Dreiecksungleichung und (M1) die Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt.

5.3 Satz (Folgenkriterium).
Seien (X, d) und (Y, D) metrische Räume und $\xi \in X$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in ξ, wenn für jede Folge $x \in X^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \to \xi$ auch $f(x_n) \to f(\xi)$ gilt.

Beweis. Seien zuerst f stetig in ξ und $x \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \to \xi$. Um $f(x_n) \to f(\xi)$ zu zeigen, fixieren wir $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$ mit $f(B(\xi, \delta)) \subseteq B(f(\xi), \varepsilon)$. Wegen $x_n \to \xi$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(\xi, x_n) < \delta$ für alle $n \geq N$, also $x_n \in B(\xi, \delta)$. Für $n \geq N$ gilt dann $f(x_n) \in B(f(\xi), \varepsilon)$, also $D(f(\xi), f(x_n)) < \varepsilon$.

Sei nun andererseits das Folgenkriterium erfüllt. Wir nehmen an, dass f unstetig in ξ ist. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $y(\delta) \in X$ existiert mit $d(\xi, y(\delta)) < \delta$ aber $D(f(\xi), f(y(\delta))) \geq \varepsilon$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x_n = y(1/n)$. Dann gilt $x_n \to \xi$, weil $d(\xi, x_n) < 1/n$, aber $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(\xi)$, weil $D(f(\xi), f(x)) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Mit Hilfe dieses Kriteriums und Satz 4.3 erhält man nun leicht folgenden nützlichen Satz, mit dessen Hilfe man die Stetigkeit vieler konkreter Abbildungen zeigen kann, ohne die definierende Bedingung nachzuweisen:

5.4 Satz.
Seien (X, d) ein metrischer Raum, $\xi \in X$ und $f, g : X \to \mathbb{C}$ zwei Abbildungen, die beide in ξ stetig sind, sowie $a, b \in \mathbb{C}$. Dann sind auch

$$af + bg : X \to \mathbb{C}, x \mapsto af(x) + bg(x) \text{ und } fg : X \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x)g(x)$$

stetig in ξ. Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$ ist auch folgende Abbildung stetig in ξ:

$$f/g : X \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x)/g(x).$$

Als Anwendung dieses Satzes erhalten wir zum Beispiel ohne jede Rechnung die Stetigkeit auf $\mathbb{C}$ von Polynomfunktionen

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{n=0}^{p} a_n z^n.$$

Ein weiteres nützliches Kriterium ergibt sich ebenfalls direkt aus dem Folgenkriterium:

5.5 Satz (Kompositionen).
Seien $(X, d), (Y, D)$ und (Z, Δ) drei metrische Räume, $\xi \in X$ und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Sind f stetig in ξ und g stetig in $f(\xi)$, so ist auch $g \circ f$ stetig in ξ.

Zum Beispiel liefert dies die Stetigkeit auf $\mathbb{C}$ der Funktion

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(z^2).$$

5.6 Satz (Stetigkeit von Potenzreihen).
Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $f : B_{\mathbb{C}}(0, R) \to \mathbb{C}$ stetig.

Beweis. Seien $\xi \in B_{\mathbb{C}}(0, R)$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| < r < R$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le r$ gilt dann

$$\begin{aligned} |f(\xi) - f(z)| &\le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, |\xi^n - z^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, |\xi - z| \left| \sum_{k=0}^{n-1} \xi^k z^{n-1-k} \right| \\ &\le |\xi - z| \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} \end{aligned}$$

Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, und deshalb hat die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} naz^n$ ebenfalls Konvergenzradius R. Also ist $c = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}$ eine reelle Zahl, so dass für alle $|z| \le r$ die Ungleichung $|f(\xi) - f(z)| \le c|\xi - z|$ gilt. Dies liefert die Stetigkeit von f in ξ. □

Wir erhalten mit Satz 5.6 insbesondere einen weiteren Beweis der Stetigkeit der Exponentialfunktion (ohne die Fundamentalidentität zu benutzen).

5.7 Satz (Zwischenwertsatz).
Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ wieder ein Intervall.

Der Name des Satzes rechtfertigt sich dadurch, dass nur Intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$ die Zwischenwerteigenschaft

$$a, b \in J \text{ und } a < c < b \Rightarrow c \in J$$

haben. Tatsächlich ist so eine Menge ein Intervall mit Randpunkten $\alpha = \inf J$ und $\beta = \sup J$, wobei wir auch $]-\infty, \beta[\, = \{x \in \mathbb{R} : x < \beta\}$ und die analog definierten Mengen $]-\infty, \beta],]\alpha, \infty[$ und $[\alpha, \infty[$ als Intervalle auffassen.

Beweis. Seien $J = f(I) = \{f(x) : x \in I\}, a, b \in J$ und $a < c < b$. Dann gibt es $\alpha, \beta \in I$ mit $a = f(\alpha)$ und $b = f(\beta)$, und wir können (nach eventueller Umbenennung) $\alpha < \beta$ annehmen. Dann ist $A = \{x \in [\alpha, \beta] : f(x) \leq c\}$ nicht leer, weil $\alpha \in A$, und nach oben (etwa durch β) beschränkt. Für $\xi = \sup A$ zeigen wir $c = f(\xi)$. Wegen Satz 4.5(b) gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $x_n \to \xi$, und das Folgenkriterium impliziert $f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq c$. Insbesondere ist $\xi < \beta$ und wegen $y_n = \xi + \frac{\beta-\xi}{n} > \xi$ ist $y_n \notin A$, also $f(y_n) > c$. Wegen $y_n \to \xi$ folgt wieder mit dem Folgenkriterium $f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) \geq c$. □

5.8 Anwendungen

(a) Ein Radfahrer fährt (mit veränderlicher Geschwindigkeit und womöglich sogar Pausen) innerhalb einer Stunde 20 km. Dann gibt es ein Zeitintervall von 30 Minuten, in dem der Radfahrer genau 10 km fährt.

Beweis. Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ beschreibe die zur Zeit $t \in [0,1]$ zurückgelegte Wegstrecke, so dass $f(0) = 0$ und $f(1) = 20$. Wir gehen davon aus, dass f stetig ist. Dann ist auch $g : [0, 1/2] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t+1/2)-f(t)$ stetig, und wir müssen zeigen, dass g den Wert 10 annimmt. Wegen $g(0) = f(1/2)$ und $g(1/2) = 20 - g(0)$ ist aber 10 eine Zahl zwischen $g(0)$ und $g(1/2)$ (weder können beide kleiner als 10 sein noch beide größer als 10), und daher folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz. □

(b) Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton ist.

Beweis. Die strenge Monotonie impliziert die Injektivität, und für die andere Implikation reicht es, den Fall $f(a) < f(b)$ zu beweisen. Wir zeigen zunächst für $x \in]a, b[$, dass $f(a) < f(x) < f(b)$ gilt. Falls nämlich $f(x) \leq f(a)$, gibt es wegen des Zwischenwertsatzes für $f|_{[x,b]}$ ein $\xi \in [x, b]$ mit $f(\xi) = f(a)$, was der Injektivität widerspricht. Genauso führt die Annahme $f(x) \geq b$ zu einem Widerspruch. Sind nun $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$, so gilt $f(a) < f(y)$ und die eben gezeigte Aussage für $b = y$ liefert $f(x) < f(y)$. Also ist f streng monoton wachsend. □

(c) Hier nun der im dritten Kapitel versprochene einfache Existenzbeiweis für die n-te Wurzel aus $y \geq 0$ (Satz 3.10): Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^n$ ist stetig mit $f(0) \leq y \leq f(1+y)$ und der Zwischenwertsatz impliziert $y = \xi^n$ für ein $\xi \geq 0$.

5.9 Der Logarithmus und allgemeine Potenzen

(a) Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist bijektiv.

Beweis. Wegen $\exp(x) = \exp(\Re x) = |\exp(x)| > 0$ für $x \in \mathbb{R}$, ist $\exp|_{\mathbb{R}}$ tatsächlich eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $]0, \infty[$, die als streng isotone Funktion injektiv ist. Für die Surjektivität fixieren wir $y > 0$. Wegen $\exp(n) \geq n$ und $\exp(-n) = 1/e^n \to 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\exp(-n) \leq y \leq \exp(n)$, und der Zwischenwertsatz impliziert, dass $y = \exp(x)$ für ein $x \in [-n, n]$ gilt. □

(b) Die Umkehrfunktion von $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ heißt (natürlicher) *Logarithmus* und wird mit $\log :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ bezeichnet.

(c)
(1) $\log(\exp(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
(2) $\exp(\log(y)) = y$ für alle $y > 0$,
(3) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ für alle $x, y > 0$,
(4) $\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$ für alle $x, y > 0$.

Beweis. (1) und (2) folgen aus der Definition der Umkehrfunktion und (3) und (4) aus der Fundamentalidentität und der Injektivität von $\exp|_{\mathbb{R}}$, weil

$$\exp(\log(x) + \log(y)) = \exp(\log(x)) \exp(\log(y)) = xy = \exp(\log(xy)). \qquad \square$$

(d) Für $x > 0$ und $p \in \mathbb{C}$ definieren wir $x^p = \exp(p \log(x))$.

(e) Für alle $x, y > 0$, $p, q \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$ gelten
(1) $x^p x^q = x^{p+q}$,
(2) $x^p y^p = (xy)^p$,
(3) $(x^r)^p = x^{rp}$,
(4) $\log(x^r) = r \log(x)$.

Beweis. (1) $x^p x^q = \exp(p \log(x)) \exp(q \log(x)) = \exp((p + q) \log(x)) = x^{p+q}$.
(2) $x^p y^p = \exp(p \log(x)) \exp(p \log(y)) = \exp(p(\log(x) + \log(y)) = \exp(p \log(xy)) = (xy)^p$.
(3) Für $r \in \mathbb{R}$ ist $x^r = \exp(r \log(x)) > 0$, was (4) zeigt, und weiter ist

$$(x^r)^p = \exp(p \log(x^r)) = \exp(pr \log(x)) = x^{pr}.$$

$\square$

Warnung. Falls $r \in \mathbb{C}$ ist $(x^r)^p$ im Allgemeinen gar nicht definiert, weil x^r nicht reell und positiv ist, und selbst wenn dies zufällig der Fall ist, gilt oft $(x^r)^p \neq x^{rp}$. Für ein Beispiel greifen wir etwas vor und benutzen $e^{2\pi i} = 1$ und $e^{\pi i} = -1$. Für $r = 2\pi i$ und $p = 1/2$ erhalten wir damit ein Gegenbeispiel.

(f) Für alle $x, y > 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$|xy| \leq \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die *Konvexität* der reellen Exponentialfunktion, das heißt

$$\exp(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda \in [0, 1].$$

Dazu reicht es (wegen $\tilde{\lambda} = 1 - \lambda \in [0, 1]$) den Fall $y < x$ zu beweisen. Wegen $\lambda^n \leq \lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\exp(\lambda(x - y)) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{(x - y)^n}{n!} \leq \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - y)^n}{n!} = \lambda(\exp(x - y) - 1),$$

also $\exp(\lambda(x - y)) \leq \lambda \exp(x - y) + (1 - \lambda)$, und Multiplikation mit $\exp(y) > 0$ liefert wegen der Fundamentalidentität die Konvexität. Damit folgt nun

$$\begin{aligned} |xy| &= \exp(\log |x| + \log |y|) = \exp\left(\frac{1}{p} \log |x|^p + \frac{1}{q} \log |y|^q\right) \\ &\leq \frac{1}{p} \exp(\log |x|^p) + \frac{1}{q} \exp(\log |y|^q) = \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q. \end{aligned} \qquad \square$$

(g) Mit Hilfe dieser Ungleichung erhalten wir ein weiteres wichtiges Beispiel einer Metrik. Wir definieren noch $0^p = 0$ für $p > 0$ und schreiben für einen Vektor $x \in \mathbb{C}^N$ und $p \geq 1$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Aus folgendem Satz erhalten wir dann, dass $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$ eine Metrik auf $\mathbb{C}^N$ ist.

5.10 Satz (Hölder- und Minkowski-Ungleichung).
Für alle $x, y \in \mathbb{C}^N$ und $p, q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gelten

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q \ \textit{und} \ \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Beweis. Durch Übergang zu $\tilde{x}_n = x_n / \|x\|_p$ und $\tilde{y}_n = y_n / \|y\|_q$ reicht es, die erste Ungleichung im Fall $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ zu zeigen. Die folgt aber direkt aus 5.9 (f):

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n y_n| \leq \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{N} |x_n|^p + \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{N} |y_n|^q = \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \|y\|_q^q = 1.$$

Im Fall $p = 1$ folgt die zweite Ungleichung aus der Dreiecksungleichung, und falls $p > 1$, wenden wir die Hölder-Ungleichung auf $q = \frac{p}{p-1}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p &\leq \sum_{n=1}^{N} |x_n| \, |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{N} |y_n| \, |x_n + y_n|^{p-1} \\
&\leq \|x\|_p \| |x + y|^{p-1} \|_q + \|y\|_p \| |x + y|^{p-1} \|_q \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = (\|x\|_p + \|y\|_p) \, \|x + y\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Dies impliziert die Minkowski-Ungleichung durch Multiplikation mit $\|x + y\|_p^{1-p}$. □

5.11 Trigonometrische Funktionen

(a) Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir Cosinus und Sinus durch

$$\begin{aligned}
\cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\
\sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

Die Reihendarstellungen erhält man durch Einsetzen in die Exponentialreihe.

(b) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten
(1) $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ (Eulersche Identität),
(2) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,
(3) $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$,
(4) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.

Beweis. (1) ist banal, und (2) - (4) folgen aus der Fundamentalidentität: Für $a = e^{iz}, b = e^{-iz}, c = e^{iw}$ und $d = e^{-iw}$ ist nämlich $\cos(z+w) = (ac+bd)/2$ und die rechte Seite in (2) ist

$$\frac{a+b}{2}\frac{c+d}{2} + \frac{a-b}{2}\frac{c-d}{2} = \frac{ac+bd}{2}.$$

Eine analoge Rechnung zeigt (3), und (4) folgt aus

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2i}\right)^2 = ab = 1.$$

□

(c) $\cos(2) < 0$.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{2^{2n}}{(2n)!} > \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}$, weil diese Ungleichung äquivalent zu der offensichtlichen $(2n+2)(2n+1) > 4$ ist. Damit folgt

$$\begin{aligned}\cos(2) &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \left(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}\right) - \cdots \\ &< 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

□

(d) $\cos|_{[0,2]} : [0,2] \to \mathbb{R}$ ist stetig, und der Zwischenwertsatz impliziert wegen $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) < 0$, dass es eine Nullstelle des Cosinus in $[0,2]$ gibt.

(e) $\pi = 2\inf\{x \in [0,2] : \cos(x) = 0\}$.

(f) Die Stetigkeit des Cosinus impliziert $\cos(\pi/2) = 0$, und es gilt $\cos(x) > 0$ für $x \in [0, \pi/2[$.

(g) $\sin(\pi/2) = 1$.

Beweis. Wegen $\cos^2 + \sin^2 = 1$ gilt $|\sin(\pi/2)| = 1$, und wir müssen noch $\sin(\pi/2) \geq 0$ zeigen. Wegen $\pi/2 \leq 2$ folgt dies aus der für alle $x \in [0,2]$ gültigen Ungleichung

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \cdots \geq x - \frac{x^3}{3!} = x\left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) \geq 0.$$ □

(h) Die Additionstheoreme (b) liefern nun weitere Werte von Sinus und Cosinus:

$$\cos(\pi) = -1,\ \sin(\pi) = 0,\ \cos(2\pi) = 1,\ \sin(2\pi) = 0.$$

Wegen $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$ gilt außerdem $0 = \cos(\pi/2) = \cos^2(\pi/4) - \sin^2(\pi/4)$. Weil Cosinus und Sinus in $[0, \pi/2]$ positiv sind, folgt aus $\cos^2 + \sin^2 = 1$

$$\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}.$$

(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten

$$\sin(z+\pi/2) = \cos(z),\ \cos(z+\pi/2) = \sin(z+\pi) = -\sin(z),\ \cos(z+\pi) = -\cos(z),$$
$$\sin(z+2\pi) = \sin(z) \text{ und } \cos(z+2\pi) = \cos(z) \text{ sowie } \exp(z+2\pi i) = \exp(z).$$

(j) $\{z \in \mathbb{C} : \sin(z) = 0\} = \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ und $\{z \in \mathbb{C} : \cos(z) = 0\} = \{(n+1/2)\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

Beweis. Wegen (i) reicht es, die Nullstellen des Cosinus zu bestimmen, und wir zeigen zuerst, dass diese reell sind. Ist $\cos(z) = 0$, so gilt $e^{iz} = -e^{-iz}$ und daher $e^{2iz} = -1$. Also ist $1 = |e^{2iz}| = \exp(\Re 2iz)$, und die Injektivität von $\exp|_{\mathbb{R}}$ liefert die $\Re iz = -\Im z = 0$.

Nach Definition von π ist $\pi/2$ die kleinste positive Nullstelle des Cosinus, und wegen $\cos(-z) = \cos(z)$ gibt es keine weitere Nullstelle in $]-\pi/2, \pi/2]$. Wegen $|\cos(z+n\pi)| = |\cos(z)|$ erhalten wir, dass alle Nullstellen von der Form $\pi/2 + n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$ sind. $\square$

5.12 Satz (Polarkoordinaten).
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b - a = 2\pi$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gibt es genau ein $\varphi \in [a, b[$ mit

$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

Beweis. Wir beweisen zuerst den Fall $a = -\pi$ und $b = \pi$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\frac{z}{|z|} = x + iy$. Dann ist $x^2 + y^2 = 1$ und insbesondere $x \in [-1, 1]$. Wegen $\cos(-\pi) = -1$ und $\cos(0) = 1$ liefert der Zwischenwertsatz ein $\alpha \in [-\pi, 0]$ mit $\cos(\alpha) = x$. Damit gilt

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 = x^2 + y^2$$

und daher $|\sin(\alpha)| = |y|$. Falls $\sin(\alpha) = y$, setzen wir $\varphi = \alpha$, und andernfalls $\varphi = -\alpha$, so dass jedenfalls $\sin(\varphi) = y$. Damit gilt also $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) = x + iy = \frac{z}{|z|}$. Für die Eindeutigkeit müssen wir zeigen, dass für $\varphi, \psi \in [-\pi, \pi[$ folgende Implikation gilt

$$e^{i\varphi} = e^{i\psi} \Rightarrow \varphi = \psi.$$

Wegen der Fundamentalidentität ist $e^{i\varphi} = e^{i\psi}$ äquivalent zu $e^{i(\varphi-\psi)} = 1$, also $\cos(\varphi - \psi) = 1$ und $\sin(\varphi - \psi) = 0$. Die einzige Stelle $x \in]-2\pi, 2\pi[$ mit $\cos(x) = 1$ ist aber $x = 0$, und wegen $\varphi - \psi \in]-2\pi, 2\pi[$ ist also $\varphi = \psi$.

Der allgemeine Fall folgt aus dem schon bewiesenen für $\tilde{z} = ze^{-i(a+\pi)}$. $\square$

5.13 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion).
Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig auf I. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ wiederum stetig.

Beweis. Wegen des Zwischenwertsatzes ist $J = f(I)$ ein Intervall. Für den Beweis der Stetigkeit von f^{-1} in $\eta = f(\xi) \in J$ fixieren wir $\varepsilon > 0$ und betrachten zunächst den Fall, dass ξ kein Randpunkt von I ist. Dann gibt es $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ mit $K = [\xi - \tilde{\varepsilon}, \xi + \tilde{\varepsilon}] \subseteq I$. Nach 5.8(b) ist $f|_K$ streng monoton, und wir können $f|_K$ als streng wachsend annehmen. Dann ist $f(\xi - \tilde{\varepsilon}) < \eta < f(\xi + \tilde{\varepsilon})$ und für $\delta = \min\{\eta - f(\xi - \tilde{\varepsilon}), f(\xi + \tilde{\varepsilon}) - \eta\}$ erhalten wir $f^{-1}(y) \in K$ für alle $|y - \eta| < \delta$ wegen des Zwischenwertsatzes. Also gilt

$$\left|f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)\right| = \left|f^{-1}(y) - \xi\right| \le \tilde{\varepsilon} < \varepsilon.$$

Ist ξ etwa linker Randpunkt von I, so argumentiert man analog mit $K = [\xi, \xi + \tilde{\varepsilon}]$. $\square$

Folgerung. Der Logarithmus $\log :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ ist stetig.

5.14 Topologische Grundbegriffe. Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$.

(a) Die Menge

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ \text{ mit } d(x, a) < \varepsilon\}$$

heißt *Abschluss* von A in (X, d). Dies ist also die Menge derjenigen Punkte von X, die sich mit beliebiger Präzision durch Elemente von A approxieren lassen, solche Punkte nennt man auch *Berührpunkte* von A. Ist (X, d) nicht durch den Kontext klar, schreiben wir auch $\overline{A}^X$ oder $\overline{A}^d$ für $\overline{A}$.

(b) $\boxed{\overline{\overline{A}} = \overline{A} \text{ und } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.}$

Beweis. Wegen $A \subseteq \overline{A}$ gilt $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$. Für die umgekehrte Inklusion betrachten wir $x \in \overline{\overline{A}}$ und $\varepsilon > 0$. Wegen $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/2 > 0$ gibt es $y \in \overline{A}$ mit $d(x, y) < \tilde{\varepsilon}$ und $a \in A$ mit $d(y, a) < \tilde{\varepsilon}$. Die Dreiecksungleichung liefert dann $d(x, a) < \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Also ist $x \in \overline{A}$.

Bei der zweiten Aussage folgt $\supseteq$ aus $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ und $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Für die andere Inklusion fixieren wir $x \in \overline{A \cup B}$ und nehmen $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$ an. Dann gibt es $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 > 0$, so dass $B(x, \varepsilon_1) \cap A = \emptyset$ und $B(x, \varepsilon_2) \cap B = \emptyset$. Für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ gilt dann $B(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) = \emptyset$ im Widerspruch zu $x \in \overline{A \cup B}$. $\square$

Warnung: $\overline{A \cap B}$ ist oft viel kleiner als $\overline{A} \cap \overline{B}$, etwa für $A = \mathbb{Q}$ und $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(c) Für $x \in X$ gilt $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ gibt mit $a_n \to x$.

Beweis. Ist $x \in \overline{A}$, so gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ mit $d(x, a_n) < 1/n$. Diese Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also gegen x. Sind andererseits $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so eine Folge und $\varepsilon > 0$, so gilt $d(x, a_n) < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

(d) Die Menge A heißt *abgeschlossen* in (X, d), falls $\overline{A} = A$. Die Menge A heißt *offen* in (X, d), falls ihr Komplement $A^c = X \setminus A$ abgeschlossen ist.

(e)
(1) A und B abgeschlossen $\Rightarrow A \cup B$ abgeschlossen.
(2) A_i abgeschlossen für alle $i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.
(3) A und B offen $\Rightarrow A \cap B$ offen.
(4) A_i offen für alle $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ offen.

Beweis. Wegen $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} = A \cup B$ gilt (1), und (2) folgt aus $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} = \bigcap_{i \in I} A_i$. Die Aussagen für offene Mengen folgen aus der Regel von de Morgan $X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i^c$. $\square$

(f) Ein Element $x \in X$ heißt *innerer Punkt* von A, falls $x \notin \overline{A^c}$. Das heißt also, dass es $\varepsilon > 0$ gibt mit $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Die Menge

$$\mathring{A} = \{x \in X : x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$$

heißt *offener Kern* oder *Inneres* von A. Gelegentlich schreiben wir auch $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Int}_X(A)$ oder A° statt $\mathring{A}$.

(g) $\boxed{\mathring{A} = X \setminus \overline{A^c} \text{ ist die größte offene Teilmenge von } A. \text{ Insbesondere ist } A = \mathring{A} \Longleftrightarrow A \text{ offen.}}$

Beweis. Die Darstellung $\mathring{A} = X \setminus \overline{A^c}$ folgt aus der Definition, und daher ist $X \setminus \mathring{A} = \overline{A^c}$ abgeschlossen. Also ist $\mathring{A}$ eine offene Teilmenge von A. Sei andererseits B irgendeine offene Teilmenge von A. Dann ist B^c abgeschlossen mit $A^c \subseteq B^c$, was $\overline{A^c} \subseteq \overline{B^c} = B^c$ und damit $B = X \setminus B^c \subseteq X \setminus \overline{A^c} = \mathring{A}$ liefert. □

(h) Hier nun einige Beispiele, wobei wir wie in 5.1 vereinbart auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ stets den Betragsabstand betrachten:
  (1) $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ weder offen noch abgeschlossen. Der Beweis folgt daraus, dass jede Kugel in $\mathbb{R}$ ein Intervall ist und sowohl rationale als auch irrationale Elemente enthält.
  (2) $\overline{]a,b[} = [a,b]$ für alle $a < b$. Ein Intervall der Form $[a,b]$ ist abgeschlossen, und $]a,b[$ ist offen in $\mathbb{R}$.
  (3) $\overline{]a,b[}^{\mathbb{C}} = [a,b]$ aber $\mathrm{Int}_{\mathbb{C}}(]a,b[) = \emptyset$.
  (4) In jedem metrischen Raum ist $\overline{B}(x,r)$ abgeschlossen und $B(x,r)$ ist offen.

  Beweis. Wir zeigen die erste Aussage. Für $y \in \overline{\overline{B}(x,r)}$ nehmen wir $d(x,y) > r$ an. Dann ist $\varepsilon = d(x,y) - r > 0$ und deshalb gibt es $a \in \overline{B}(x,r)$ mit $d(y,a) < \varepsilon$. Die Dreiecksungleichung liefert dann den Widerspruch

$$r + \varepsilon = d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < r + \varepsilon.$$

□

  (5) Warnung: Im Allgemeinen ist $\overline{B(x,r)}$ kleiner als $\overline{B}(x,r)$. Ist nämlich δ die diskrete Metrik, so ist $B(x,1) = \{x\}$ abgeschlossen, also $\overline{B(x,1)} = \{x\} \neq X = \overline{B}(x,1)$, falls X mindestens zwei Elemente hat.
  (6) In $\mathbb{C}^n$ mit dem euklidischen Abstand gilt hingegen

$$\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r) \text{ für alle } x \in \mathbb{C}^n \text{ und } r > 0.$$

Beweis. Was wir hier benötigen, ist die sogenannte *Homogenität* der euklidischen Norm:

$$\|\alpha y\|_2 = |\alpha|\, \|y\|_2 \text{ für } \alpha \in \mathbb{C} \text{ und } y \in \mathbb{C}^n.$$

Seien also $y \in \overline{B}(x,r)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $0 < \delta < 1$ mit $\delta < \varepsilon/r$, und wir setzen $a = \delta x + (1-\delta)y$. Dann gelten

$$\begin{aligned} &\|x-a\|_2 = \|(1-\delta)(x-y)\|_2 = (1-\delta)\|x-y\|_2 \leq (1-\delta)r < r \text{ und} \\ &\|a-y\|_2 = \|\delta(x-y)\|_2 = \delta\|x-y\| \leq \delta r < \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir haben also $a \in B(x,r)$ und $d(y,a) < \varepsilon$ gezeigt. □

5.15 Satz.
Für zwei metrische Räume (X,d) und (Y,D) und eine Abbildung $f : X \to Y$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f ist stetig auf X.
(2) Für alle $A \subseteq X$ gilt $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
(3) Für alle abgeschlossenen $B \subseteq Y$ ist $f^{-1}(B)$ in X abgeschlossen.
(4) Für alle offenen $C \subseteq Y$ ist $f^{-1}(C)$ in X offen.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Für $\xi \in \overline{A}$ gibt es nach 5.14(c) eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $a_n \to \xi$ und die Stetigkeit in ξ impliziert wegen des Folgenkriteriums $f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \in \overline{f(A)}$ wieder wegen 5.14(c).

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei nun $A = f^{-1}(B)$. Dann gilt nach (2)

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{B} = B,$$

was äquivalent zu $\overline{A} \subseteq f^{-1}(B) = A$ ist. Also ist $A = f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

(3) $\Rightarrow$ (4): $B = Y \setminus C$ ist abgeschlossen, und nach (3) ist daher

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(C) = X \setminus f^{-1}(C)$$

abgeschlossen, so dass $f^{-1}(C)$ offen ist.

(4) $\Rightarrow$ (1): Seien $\xi \in X$ und $\varepsilon > 0$. Weil $C = B_Y(f(\xi),\varepsilon)$ offen ist und $\xi \in f^{-1}(C)$, ist ξ ein innerer Punkt von $f^{-1}(C)$. Also gibt es $\delta > 0$ mit $B_X(\xi,\delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(\xi),\varepsilon))$. $\square$

Bemerkung. Mit Hilfe dieses Satzes kann man oft sehr leicht die Abgeschlossenheit konkreter Mengen zeigen. Insbesondere sind für stetiges $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ Mengen der Form

$$\{x \in \mathbb{C}^n : f(x) \le a\} \text{ oder } \{x \in \mathbb{C}^n : f(x) \ge b\}$$

als Urbilder von $]-\infty, a]$ beziehungsweise $[b,\infty[$ stets abgeschlossen. Zum Beispiel ist die Menge

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(xy) \le \exp(y)\}$$

abgeschlossen als Urbild von $]-\infty,1]$ unter der stetigen Abbildung $(x,y) \mapsto \sin(xy)\exp(-y)$.

Warnung. Stetige Bilder abgeschlossener oder offener Mengen sind sehr oft nicht abgeschlossen beziehungsweise offen:

(a) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, $A = \mathbb{R}$ ist abgeschlossen aber $f(A) =]0,\infty[$ ist nicht abgeschlossen.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist stetig, $A = \mathbb{R}$ ist offen aber $f(A) = [0,\infty[$ ist nicht offen.

5.16 Kompaktheit. Ziel dieses Abschnittes ist, eine Eigenschaft zu definieren, die stärker als Abgeschlossenheit ist und unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt.

(a) Seien X eine Menge und $x \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Eine Folge $y \in X^{\mathbb{N}}$ heißt eine *Teilfolge* von x, falls es eine streng monoton wachsende Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt (wir schreiben dann $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$) mit $y = x \circ \varphi$, also $y_n = x_{\varphi(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Teilfolge y entsteht also durch Auslassen aller Folgenglieder x_k mit $k \notin \varphi(\mathbb{N})$.

(b) Beispiel: Seien $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $s = \limsup x$. Dann gibt es eine Teilfolge von x, die gegen s konvergiert.

Beweis. In 4.10(b) haben wir den Limes superior s dadurch charakterisiert, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $M_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : x_n > s - \varepsilon\}$ unendlich ist und außerdem die Menge $K_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : x_n > s + \varepsilon\}$ endlich, so dass auch $M_\varepsilon \setminus K_\varepsilon$ unendlich ist. Wir konstruieren $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ rekursiv und beginnen mit $\varphi(1) = 1$. Sind $\varphi(1) < \cdots < \varphi(n-1)$ schon konstruiert, so gibt es $\varphi(n) \in M_{1/n} \setminus K_{1/n}$ mit $\varphi(n) > \varphi(n-1)$. Für alle $n \geq 2$ ist dann also

$$x_{\varphi(n)} > s - 1/n \text{ und } x_{\varphi(n)} \leq s + 1/n,$$

so dass $|x_{\varphi(n)} - s| \leq 1/n$, was $x_{\varphi(n)} \to s$ zeigt. □

(c) Im folgenden sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $x \in X^{\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, so konvergiert jede Teilfolge gegen denselben Grenzwert (weil die strenge Monotonie $\varphi(n) \geq n$ impliziert, was man durch vollständige Induktion zeigt). Wegen (b) hat andererseits jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ eine (und damit viele) konvergente Teilfolge.

(d) Eine Teilmenge K eines metrischen Raum (X, d) heißt *kompakt*, falls jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K besitzt.

(e) Fundamentalbeispiel: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $[a, b]$ kompakt.

Beweis. Sei x eine Folge in $[a, b]$. Wegen (b) hat x eine konvergente Teilfolge, und weil $[a, b]$ abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert in $[a, b]$. □

(f)
(1) K kompakt $\Rightarrow$ K abgeschlossen.
(2) K kompakt und A abgeschlossen $\Rightarrow$ $K \cap A$ kompakt.
(3) K und L kompakt $\Rightarrow$ $K \cup L$ kompakt.
(4) K kompakt $\Rightarrow$ K *beschränkt*, das heißt $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x \in K\} < \infty$.

Beweis. (1) Für $\xi \in \overline{K}$ gibt es nach 5.14 (c) eine Folge x in K, die gegen ξ konvergiert, und weil K kompakt ist gibt es eine konvergente Teilfolge y von x mit einem Grenzwert $\eta \in K$. Wegen (c) konvergiert y aber auch gegen ξ, und die Eindeutigkeit des Grenzwertes liefert $\xi = \eta \in K$.

(2) Jede Folge in $K \cap A$ ist auch eine in K und hat daher eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $\overline{K \cap A} = K \cap A$.

(3) Jede Folge x in $K \cup L$ hat entweder eine Teilfolge y in K oder eine Teilfolge y in L. Im ersten Fall gibt es eine Teilfolge z von y mit Grenzwert in K. Falls $y = x \circ \varphi$ und $z = y \circ \psi$ mit $\varphi, \psi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$, so ist $z = x \circ (\varphi \circ \psi)$ mit $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$. Also ist z eine Teilfolge von x mit Grenzwert in $K \subseteq K \cup L$. Im zweiten Fall argumentiert man genauso.

(4) Falls $K = \emptyset$, ist $\sup\{d(x, y) : x \in K\} = \sup \emptyset = -\infty$ nach Konvention. Andernfalls wählen wir $a \in K$ und zeigen $c = \sup\{d(a, x) : x \in K\} < \infty$. Falls dies nicht so ist, gibt es $x_n \in K$ mit $d(a, x_n) \geq n$. Wegen der Kompaktheit gibt es $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ und $\xi \in K$ mit $x_{\varphi(n)} \to \xi$. Die Dreiecksungleichung liefert dann den Widerspruch

$$n \leq \varphi(n) \leq d(a, x_{\varphi(n)}) \leq d(a, \xi) + d(\xi, x_{\varphi(n)}) \to d(a, \xi).$$

Wieder mit der Dreiecksungleichung folgt dann $\operatorname{diam}(A) \leq 2c < \infty$. □

(g) Abgeschlossenheit und Beschränktheit sind also notwendig für die Kompaktheit, und wir beweisen bald den Satz von Heine und Borel, dass in $\mathbb{C}^n$ auch die Umkehrung gilt. Hier jedoch zwei Beispiele, die zeigen, dass die Umkehrung in allgemeinen metrischen Räumen nicht gilt:

(1) Ist δ die diskrete Metrik auf einer unendlichen Menge X, so ist $K = X$ abgeschlossen und beschränkt aber nicht kompakt.
(2) Für jede unendliche Menge I ist die Kugel $\overline{B}(0,1)$ im Raum der beschränkten Abbildungen $\ell_\infty(I) = \{x : I \to \mathbb{C} : \sup\{|x(t)| : t \in I\} < \infty\}$ abgeschlossen und beschränkt aber nicht kompakt.

BEWEIS. Seien t_n verschiedene Elemente von I und $x_n : I \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } t = t_n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.
Dann ist $x_n \in \overline{B}(0,1)$, aber die Folge $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge, weil

$$d_\infty(x_n, x_m) = \sup\{|x_n(t) - x_m(t)| : t \in I\} = 1 \text{ für alle } n \neq m.$$

Gäbe es nämlich $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ und $\xi \in \ell_\infty(I)$ mit $x_{\varphi(n)} \to \xi$, so wäre für alle genügend großen $n \neq m$

$$1 = d_\infty(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(m)}) \le d_\infty(x_{\varphi(n)}, \xi) + d_\infty(\xi, x_{\varphi(m)}) < \frac{1}{2}.$$ □

(h) Der folgende fundamentale Satz zeigt, dass Kompaktheit unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt:

5.17 Satz.
Seien (X,d) und (Y,D) zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Ist $K \subseteq X$ kompakt und f stetig auf K, so ist $f(K)$ in Y kompakt und insbesondere abgeschlossen.

(b) Sind K kompakt und $f : K \to Y$ stetig und injektiv, so ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(K) \to K$ ebenfalls stetig.

(c) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ stetig auf einer kompakten Menge $K \subseteq X$, so nimmt f Minimum und Maximum auf K an, das heißt es gibt $\xi, \eta \in K$ mit

$$f(\xi) = \inf\{f(x) : x \in K\} \text{ und } f(\eta) = \sup\{f(x) : x \in K\}.$$

Der zweite Teil des Satzes impliziert ziemlich leicht den Satz 5.13, ist aber viel allgemeiner anwendbar als jener. Die automatische Stetigkeit der Umkehrfunktion gilt übrigens auch für stetige Bijektionen zwischen offenen Mengen in $\mathbb{R}^d$, allerdings ist der Beweis dieses Satzes von L.E.J. Brouwer zu schwer für unsere Vorlesung.

Sehr viele praktische Fragen lassen sich mathematisch als Optimierungsprobleme in der Form

$$\textit{Bestimme } \xi \in K \textit{ so, dass } f(\xi) = \max\{f(x) : x \in K\}$$

formulieren. Der Satz 5.17(c) ist dann fast immer das zentrale Argument für die Existenz solcher Punkte ξ. Man hat das Problem dann zwar noch nicht gelöst, aber die Suche nach etwas, was es womöglich gar nicht gibt, kann sehr viel schwieriger sein.

BEWEIS. (a) Sei y eine Folge im Bild $f(K)$. Dann gibt es $x_n \in K$ mit $y_n = f(x_n)$, und wegen der Kompaktheit von K gibt es $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ und $\xi \in K$ mit $x_{\varphi(n)} \to \xi$. Die Stetigkeit auf K und das Folgenkriterium liefern dann $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \to f(\xi) \in f(K)$.

(b) Wegen Satz 5.15 müssen wir für $g = f^{-1}$ und jedes abgeschlossene $A \subseteq K$ zeigen, dass das Urbild von A unter g in $f(K)$ abgeschlossen ist. Dieses Urbild unter der Umkehrabbildung ist aber gerade das Bild $f(A)$, das wegen (a) sogar kompakt ist, weil A als abgeschlossene

Teilmenge von K kompakt ist. (Hier ein alternativer Beweis mit Hilfe des Folgenkriteriums: Für $y_n = f(x_n) \to \eta = f(\xi)$ muss man zeigen, dass $x_n = f^{-1}(x_n)$ gegen $\xi = f^{-1}(\eta)$ konvergiert. Andernfalls gibt es $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $x \circ \varphi$ mit $d(\xi, x \circ \varphi(n)) \geq \varepsilon$ $(*)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Kompaktheit gibt es eine weitere Teilfolge $x \circ \varphi \circ \psi$, die gegen ein $\zeta \in K$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit in ζ gilt $f(\zeta) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x \circ \varphi \circ \psi(n)) = f(\xi)$, und die Injektivität impliziert $\xi = \zeta$ im Widerspruch zu $(*)$.)

(c) Für jede (nach oben) beschränkte nicht leere Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\sup A \in \overline{A}$. Nach Satz 4.5(b) gibt es nämlich $a_n \in A$ mit $a_n \to \sup A$. Für $A = f(K)$ gilt also $\sup f(K) \in \overline{f(K)} = f(K)$ wegen (a), das heißt $\sup f(K) = f(\eta)$ für ein $\eta \in K$. Die Aussage über das Infimum folgt mit $\tilde{f}(x) = -f(x)$. $\square$

5.18 Satz (Topologie des $\mathbb{C}^N$).

Seien $p \in [1, \infty]$ und $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{1/p}$ für $p < \infty$, und $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}$ sowie $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$.

(a) Eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_N) : X \to \mathbb{C}^N$ mit einem metrischen Raum (X, d) ist genau dann stetig in $\xi \in X$, wenn alle Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_N : X \to \mathbb{C}$ in ξ stetig sind.

(b) Eine Folge $x \in (\mathbb{C}^N)^{\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, wenn für jedes $k \in \{1, \dots, N\}$ die k-te Komponentenfolge in $\mathbb{C}$ gegen ξ_k konvergiert.

(c) Eine Folge $x \in (\mathbb{C}^N)^{\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn sie die Cauchy-Bedingung erfüllt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists M \in \mathbb{N}\, \forall n, m \geq M \quad \textit{gilt } d_p(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(d) Heine-Borel: *$K \subseteq \mathbb{C}^N$ ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis.

(a) Seien $\pi_k : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$ die Projektionen. Wegen $|x_k - y_k| \leq d_p(x, y)$ sind alle π_k stetig, und wegen $f_k = \pi_k \circ f$ impliziert die Stetigkeit von f in ξ die von f_k. Andererseits gilt

$$d_p(x, y) \leq c_p \max\{|x_k - y_k| : k \in \{1, \dots, N\}\}$$

mit $c_p = N^{1/p}$ für $p < \infty$ und $c_\infty = 1$. Sind nun alle f_k stetig in ξ und $\varepsilon > 0$, so gibt es $\delta > 0$ mit

$$d(\xi, x) < \delta \Rightarrow |f_k(\xi) - f_k(x)| < \varepsilon / c_p$$

für alle $x \in X$ und $k \in \{1, \dots, N\}$. Mit obiger Ungleichung folgt dann $d_p(f(\xi), f(x)) < \varepsilon$.

(b) zeigt man mit den gleichen Argumenten wie in (a), oder man stellt mit Hilfe von Aufgabe 2, Blatt 10 fest, dass (b) ein Spezialfall von (a) ist.

(c) Die Notwendigkeit der Cauchy-Bedingung folgt (übrigens in jedem metrischen Raum) aus der Dreiecksungleichung. Erfüllt $x \in (\mathbb{C}^N)^{\mathbb{N}}$ andererseits die Cauchy-Bedingung, so tun dies auch alle Komponentenfolgen $x_k = \pi_k \circ x$. Wegen der Folgenvollständigkeit von $\mathbb{C}$ sind also alle Komponentenfolgen konvergent, und mit (b) erhalten wir die Konvergenz der Folge x.

(d) Die Notwendigkeit gilt nach 5.16 (f) sogar in jedem metrischen Raum, und die Hinlänglichkeit zeigen wir durch Induktion nach der Dimension $N \in \mathbb{N}$. Seien also zuerst $K \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt und $z \in K^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit Real- und Imaginärteilfolgen x beziehungsweise y. Wegen $|x_n| \leq |z_n|$ und $|y_n| \leq |z_n|$ sind x und y beschränkt. Wegen des Fundamentalbeispiels gibt es also $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ und $\xi \in \mathbb{R}$ mit $x \circ \varphi \to \xi$. Weil $y \circ \varphi$ beschränkt ist, gibt es ein weiteres $\psi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ und $\eta \in \mathbb{R}$ mit $y \circ \varphi \circ \psi \to \eta$. Dann gilt auch $x \circ \varphi \circ \psi \to \xi$, und Satz 4.3(d) impliziert $z \circ \varphi \circ \psi \to \xi + i\eta$. Wegen der Abgeschlossenheit von K ist schließlich $\xi + i\eta \in K$.

Im Induktionsschritt $N \to N+1$ schreibt man $z_n \in \mathbb{C}^{N+1}$ als $z_n = (x_n, y_n)$ mit $x_n \in \mathbb{C}^N$ und $y_n \in \mathbb{C}$ und argumentiert genau wie eben, indem man das Fundamentalbeispiel durch die Induktionsvoraussetzung und den Fall $N = 1$ ersetzt und statt des Satzes 4.3 den eben bewiesenen Teil (b) benutzt. □

Als Anwendung zweier zentraler Resultate dieses Kapitels (nämlich der Polarkoordinatendarstellung als Folgerung aus dem Zwischenwertsatz sowie Satz 5.17) beweisen wir nun eines der wichtigsten Theoreme der Algebra:

5.19 Satz (Fundamentalsatz der Algebra).
Jedes nicht konstante Polynom $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ *hat eine komplexe Nullstelle.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\inf\{|p(z)| : z \in \mathbb{C}\}$ angenommen wird. Wegen

$$\left|\frac{p(z)}{z^n}\right| = \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq \frac{|a_n|}{2}$$

für $|z|$ genügend groß, gibt es $R > 0$ mit $|p(z)| > |a_0| = |p(0)|$ für alle $|z| > R$. Also ist $\inf\{|p(z)| : z \in \mathbb{C}\} = \inf\{|p(z)| : z \in \overline{B}(0,R)\} = |p(\xi)|$ für ein $\xi \in \overline{B}(0,R)$ nach Satz 5.17(c), weil $\overline{B}(0,R)$ kompakt ist und $z \mapsto |p(z)|$ stetig.

Wir zeigen im Folgenden $p(\xi) = 0$, wobei wir durch eventuellen Überganz zu $\tilde{p}(z) = p(\xi + z)$ annehmen können, dass $\xi = 0$ ist. Falls $p(0) \neq 0$ können wir weiter annehmen, dass $p(0) = 1$ gilt. Dann gibt es also $m \in \mathbb{N}$ mit

$$p(z) = 1 + z^m a_m + z^{m+1} a_{m+1} + \cdots = 1 + z^m a_m + z^{m+1} Q(z)$$

mit einem Polynom Q und $a_m \neq 0$ (weil p nicht konstant ist). Mit der Polarkoordinatendarstellung $-1/a_m = re^{i\varphi}$ finden wir leicht eine m-te Wurzel $b = \sqrt[m]{r} e^{i\varphi/m}$ von $-1/a_m$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$p(tb) = 1 - t^m + (tb)^{m+1} Q(tb).$$

Ist $c = \sup\{|b^{m+1} Q(tb)| : t \in [0,1]\}$, so erhalten wir mit der Dreiecksungleichung für $t \in [0,1]$

$$|p(tb)| \leq 1 - t^m + t^{m+1} c.$$

Für $0 < t < \min\{1/c, 1\}$ folgt dann der Widerspruch

$$|p(tb)| < 1 = \inf\{|p(z)| : z \in \mathbb{C}\}.$$ □

Bemerkung. Ist $p(\xi) = 0$, so kann man den Faktor $(z - \xi)$ aus dem Polynom ausklammern: Durch entwickeln mittels des Binomialsatzes von $z^k = (z - \xi + \xi)^k$ finden wir $c_k \in \mathbb{C}$ mit

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z-\xi)^k = \sum_{k=1}^{n} c_k (z-\xi)^k = (z-\xi) \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1} (z-\xi)^k.$$

Durch Induktion nach dem Grad erhalten wir dann, dass jedes Polynom vom Grad n von folgender Form ist:

$$p(z) = c(z-\xi_1)(z-\xi_2)\cdots(z-\xi_n).$$

5.20 Gleichmäßige Stetigkeit

(a) Seien (X, d) und (Y, D) metrische Räume, $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$. Die Stetigkeit auf A bedeutet gemäß 5.2

$$\forall \xi \in A \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in A \ \text{ gilt } (d(\xi, x) < \delta \Rightarrow D(f(\xi), f(x)) < \varepsilon).$$

Das δ in dieser Kette von Quantoren hängt im Allgemeinen sowohl von ε also auch von ξ ab, und in dem Beispiel

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

gibt es zu $\varepsilon = 1$ tatsächlich kein $\delta > 0$, so dass die Implikation simultan für alle ξ gilt (weil nämlich $|\xi^2 - (\xi + \delta/2)^2| = |(2\xi + \delta/2)\delta/2| \geq \delta|\xi| \geq \varepsilon$ für $\xi \geq \varepsilon/\delta$.)

(b) Eine Abbildung $f : A \to Y$ heißt *gleichmäßig stetig* auf A, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in A \ \text{ gilt } (d(y, x) < \delta \Rightarrow D(f(y), f(x)) < \varepsilon).$$

Wir haben hier y statt ξ geschrieben, weil diese Bedingung nun symmetrisch in x und y ist. Genau wie bei der Stetigkeit in einem Punkt haben wir:

(c) Folgenkriterium: f ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn für alle Folgen $x, y \in A$ mit $d(x_n, y_n) \to 0$ auch $D(f(x_n)), f(y_n) \to 0$ gilt.

(d) Ein Beispiel für die Nützlichkeit der gleichmäßigen Stetigkeit: Seien $I = [a, b]$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig sowie $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Treppenfunktion $g : I \to \mathbb{C}$ mit

$$\|f - g\|_\infty = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in I\} \leq \varepsilon.$$

Dabei heißt $g : I \to \mathbb{C}$ *Treppenfunktion*, falls es $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ und $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$ gibt mit $g(t) = y_k$ für $t \in [t_k, t_{k+1}[$. Um dies zu beweisen, wählt man δ wie in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit, $n \in \mathbb{N}$ mit $(b - a)/n < \delta$, $t_k = a + k\frac{b-a}{n}$ und $y_k = f(t_k)$.

5.21 Satz.
Seien (X, d), (Y, D) zwei metrische Räume, $K \subseteq X$ und $f : K \to Y$ stetig auf K. Ist K kompakt, so ist f sogar gleichmäßig stetig.

Beweis. Andernfalls gäbe es $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta = 1/n$ Punkte $x_n, y_n \in K$ existieren mit $d(x_n, y_n) < 1/n$ und $D(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Wegen der Kompaktheit gibt es $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ und $\xi \in K$ mit $x \circ \varphi \to \xi$, was wegen $d(\xi, y_{\varphi(n)}) \leq d(\xi, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \to 0$ auch $y \circ \varphi \to \xi$ impliziert. Wegen der Stetigkeit in ξ liefert das Folgenkriterium den Widerspruch

$$\varepsilon \leq D(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)}) \leq D(f(x_{\varphi(n)}), f(\xi)) + D(f(\xi), f(y_{\varphi(n)})) \to 0. \qquad \square$$

5.22 Satz (Weierstraß).
Seien $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{C}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein Polynom $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $\sup\{|f(x) - p(x)| : x \in I\} \le \varepsilon$.

Beweis. Wir beweisen den Fall $I = [0, 1]$ (der allgemeine Fall folgt dann mit $\tilde{f}(t) = f(ta + (1 - t)b)$). Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das n-te *Bernstein-Polynom*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}.$$

Wir benötigen einige einfache Identitäten für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 1]$:

(1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = 1$,

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = x$,

(3) $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k - 1)\binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = n(n - 1)x^2$,

(4) $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{1}{n}$.

(Die erste Identität ist der Binomialsatz, der auch (2) und (3) liefert, weil
$\frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = x\binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1 - x)^{(n-1)-(k-1)}$ und
$k(k - 1)\binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = n(n - 1)x^2 \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1 - x)^{(n-2)-(k-2)}$.
Die vierte Aussage folgt durch Ausmultiplizieren aus (1), (2) und (3).)

Nun der eigentliche Beweis. Wegen 5.17 gibt es $c > 0$ mit $|f(x)| \le c$ für alle $x \in [0, 1]$, und wegen 5.21 ist f gleichmäßig stetig, so dass es $\delta > 0$ gibt mit $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$. Wir wählen nun $n \ge \frac{4c}{\varepsilon\delta^2}$ und zeigen $|p_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ für alle $x \in [0, 1]$. Dazu fixieren wir $x \in [0, 1]$ und betrachten

$$A = \{k \in \{0, \dots, n\} : \left|\tfrac{k}{n} - x\right| < \delta\} \text{ und } B = \{k \in \{0, \dots, n\} : \left|\tfrac{k}{n} - x\right| \ge \delta\}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
|p_n(x) - f(x)| &\le \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\tfrac{k}{n}\right) - f(x)\right| \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = \sum_{k\in A} \cdots + \sum_{k\in B} \cdots \\
&\le \sum_{k\in A} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} + \sum_{k\in B} 2c\frac{\delta^2}{\delta^2} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2c}{\delta^2} \sum_{k\in B} \left(\tfrac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2c}{\delta^2}\frac{1}{n} \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

5.23 Funktionenfolgen

(a) Seien (X,d) und (Y,D) zwei metrische Räume, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : X \to Y$ eine Abbildung. Wir utnersuchen in diesem Abschnitt die Frage nach der Stetigkeit der Grenzfunktion, falls die Folge der Funktionen in einem zu präzisierenden Sinn konvergiert.

(b) Für $A \subseteq X$ heißt die Folge *punktweise konvergent* auf A gegen $f : A \to Y$, falls für jedes $x \in A$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in (Y,D) gegen $f(x)$ konvergiert, das heißt also

$$\forall x \in A\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N \text{ gilt } D(f(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

(c) **Beispiel:** Die Folge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ konvergiert punktweise gegen die unstetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1 \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$. Dieses einfache Beispiel zeigt, dass punktweise Grenzwerte sehr einfacher sogar gleichmäßig stetiger Funktionen nicht stetig zu sein brauchen.

(d) Für $A \subseteq X$ heißt die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig konvergent* auf A gegen $f : A \to Y$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall x \in A\, \forall n \geq N \text{ gilt } D(f(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

(e) Für $Y = \mathbb{C}$ und beschränkte Funktionen f_n ist dies genau die Konvergenz in dem metrischen Raum $\ell_\infty(X)$ mit dem Abstand $\|f - g\|_\infty$ (und man kann dies auf beliebige metrische Räume in naheliegender Weise verallgemeinern, worauf wir verzichten).

(f) Offenbar impliziert die gleichmäßige Konvergenz die punktweise.

5.24 Satz.
Seien (X,d) und (Y,D) metrische Räume und $f_n : X \to Y$ Abbildungen sowie $\xi \in X$. Sind alle f_n stetig in ξ und gilt $f_n \to f$ gleichmäßig, so ist auch f stetig in ξ. Dasselbe gilt, falls $f_n \to f$ gleichmäßig auf einer offenen Menge $A \ni \xi$. Sind alle f_n gleichmäßig stetig und gilt $f_n \to f$ gleichmäßig auf A, so ist auch f gleichmäßig stetig auf A.

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $r > 0$, so dass $B(\xi, r) \subseteq A$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $D(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3$ für alle $n \geq N$ und $x \in B(\xi, r)$. Wegen der Stetigkeit von f_N gibt es $\delta > 0$ mit $D(f_N(\xi), f_N(x)) < \varepsilon/3$ für alle $x \in B(\xi, \delta)$, und durch Verkleinern können wir $\delta \leq r$ erreichen. Mit der Dreiecksungleichung folgt für alle $x \in B(\xi, \delta)$

$$D(f(\xi), f(x)) \leq D(f(\xi), f_N(\xi)) + D(f_N(\xi), f_N(x)) + D(f_N(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Also ist f stetig in ξ. Der gleiche Beweis zeigt die gleichmäßige Stetigkeit, falls f_N gleichmäßig stetig ist. $\square$

Anwendung. Wir erhalten einen weiteren Beweis für die Stetigkeit von Potenzreihen $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ auf dem Konvergenzkreis $B(0,R)$:

Wegen 5.23 reicht es zu zeigen, dass die Konvergenz von $f_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k z^k$ auf jeden Kreis $B(0,r)$ mit $r < R$ gleichmäßig ist, und dies folgt aus $|f(z) - f_n(z)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |c_k| r^k \to 0$ wegen der absoluten Konvergenz der Reihe.

5.25 Konvergenz von Funktionenfolgen

(a) Seien (X,d) ein metrischer Raum und $x \in X^{\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung die *Cauchy-Bedingung*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall m,n \geq N \text{ gilt } d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(b) Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, falls jede Folge, die die Cauchy-Bedingung erfüllt (und dementsprechend *Cauchy-Folge* heißt), konvergiert.

(c) In 5.18 (c) haben wir gezeigt, dass $(\mathbb{C}^N, d_p)$ für jedes $p \in [1,\infty]$ vollständig ist. Ist wie in dieser Situation X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und die vollständige Metrik von einer *Norm* vermöge $d(x,y) = \|x-y\|$ erzeugt, so nennt man $(X, \|\cdot\|)$ einen *Banach-Raum*. Eine Norm ist dabei eine Abbildung $X \to [0,\infty[$, so dass für alle $x, y \in X$ und alle Zahlen α folgende Bedingungen gelten:
(1) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Hier ein weiteres interessantes Beispiel eines Banach-Raums:

(d) Seien I eine nicht-leere Menge, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banach-Raum und

$$\ell_\infty(I,Y) = \{f : I \to Y \text{Abbildung} : \|f\|_\infty = \sup\{\|f(t)\|_Y : t \in I\} < \infty\}.$$

Dann ist $\ell_\infty(I,Y)$ ein Banach-Raum.

Beweis. Dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm ist, haben wir in 5.2 (f) gezeigt. Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\ell_\infty(I,Y)$. Wegen $\|f_n(t) - f_m(t)\|_Y \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ ist dann $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $t \in I$ eine Cauchy-Folge in Y, die wegen der Vollständigkeit einen Grenzwert $f_\infty(t)$ hat (das heißt, die Folge f_n konvergiert punktweise gegen f_∞). Um $f_\infty \in \ell_\infty(I,Y)$ und die Konvergenz in diesem Raum zu zeigen, wählen wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon/2$ für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$. Für alle $t \in I$ und $n \geq N(\varepsilon)$ gilt dann für hinreichend große $m \in \mathbb{N}$

$$\|f_n(t) - f_\infty(t)\|_Y \leq \|f_n(t) - f_m(t)\|_Y + \|f_m(t) - f_\infty(t)\|_Y < \varepsilon/2 + \|f_m(t) - f_\infty(t)\|_Y \leq \varepsilon.$$

Für $\varepsilon = 1$ erhalten wir insbesondere $f_\infty \in \ell_\infty(I,Y)$, und durch Supremumsbildung folgt $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$, also die Konvergenz $f_n \to f_\infty$ in dem Raum $\ell_\infty(I,Y)$. □

Als Konsequenz der Vollstädingkeit erhalten wir folgendes hinreichende Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz von Weierstraß:

(e) Seien I eine nicht-leere Menge und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banach-Raum sowie $f_n \in \ell_\infty(I,Y)$, so dass

$$\sum_{n=2}^{\infty} \|f_n - f_{n-1}\|_\infty < \infty \text{ (das heißt, die Reihe konvergiert in } \mathbb{R}).$$

Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf I.
Falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$, so konvergiert die Folge $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig.

Beweis. Wegen $\|f_n - f_m\|_\infty = \Big\| \sum\limits_{k=n+1}^{m} f_k - f_{k-1} \Big\|_\infty \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} \|f_k - f_{k-1}\|_\infty$ erfüllt nämlich die Folge die Cauchy-Bedingung und konvergiert daher in $\ell_\infty(I,Y)$, und die Konvergenz in diesem Banach-Raum ist genau die gleichmäßige Konvergenz auf I. Die zweite Aussage folgt aus der ersten. $\square$

5.26 Funktiongrenzwerte

(a) Seien (X,d) und (Y,D) zwei metrische Räume, $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ eine Funktion und $\xi \in \overline{A}$. Die Funktion f besitzt in ξ den *Grenzwert* $\eta \in Y$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in A \;\text{ gilt } (d(\xi, x) < \delta \Rightarrow D(\eta, f(x)) < \varepsilon).$$

In diesem Fall schreibt man $\eta = \lim\limits_{A \ni x \to \xi} f(x)$ oder $f(x) \to \eta$ für $A \ni x \to \xi$.

(b) Falls $\xi \in A$, so gilt $f(x) \to \eta$ für $A \ni x \to \xi$ genau dann, wenn $\eta = f(\xi)$ und f in ξ stetig ist. Im interessanteren Fall $\xi \in \overline{A} \setminus A$ existiert der Grenzwert von f in ξ genau dann, wenn man f zu einer in ξ stetigen Funktion auf $A \cup \{\xi\}$ fortsetzen kann, also falls

$$\overline{f} : A \cup \{\xi\} \to Y,\, x \mapsto \begin{cases} f(x) & ,\quad x \in A \\ \eta & ,\quad x = \xi \end{cases}$$

im Punkt ξ stetig ist. Das Folgenkriterium für die Stetigkeit liefert:

(c) FOLGENKRITERIUM. $f(x) \to \eta$ für $A \ni x \to \xi$ gilt genau dann, wenn für jede Folge $x \in A^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \to \xi$ auch $f(x_n) \to \eta$ gilt.

(d) **Beispiel.** Für alle $\xi \in \mathbb{C}$ gilt für$A = \mathbb{C} \setminus \{\xi\}$

$$\lim_{A \ni z \to \xi} \frac{\exp(z) - \exp(\xi)}{z - \xi} = \exp(\xi)$$

(in Kapitel 7 werden wir dies die Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion nennen).

BEWEIS. Wegen der Fundamentalidentität ist

$$\frac{\exp(z) - \exp(\xi)}{z - \xi} - \exp(\xi) = \exp(\xi) \left(\frac{\exp(z - \xi) - 1}{z - \xi} - 1 \right) = \exp(\xi) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z - \xi)^{n-1}}{n!}.$$

Die Stetigkeit der Potenzreihe $g(w) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{(n+1)!}$ liefert also

$$\frac{\exp(z) - \exp(\xi)}{z - \xi} - \exp(\xi) = \exp(\xi) g(z - \xi) \to \exp(\xi) g(0) = 0 \text{ für } z \to \xi. \qquad \square$$

(e) CAUCHY-KRITERIUM. Ist (Y,D) ein vollständiger metrischer Raum, so existiert der Grenzwert von f in ξ genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x, y \in A \;\text{ gilt } (d(\xi, x) + d(\xi, y) < \delta \Rightarrow D(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

BEWEIS. Die Notwendigkeit folgt (auch ohne die Vollständigkeit) aus der Dreiecksungleichung. Für die Hinlänglichkeit wählen wir zu $\xi \in \overline{A}$ eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $a_n \to \xi$. Dann ist $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y, weshalb der Grenzwert $\eta = \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n)$ existiert. Um $f(x) \to \eta$ für $x \to \xi$ zu zeigen, benutzen wir das Folgenkriterium. Sei also $x \in A^{\mathbb{N}}$ eine Folge in A mit $x_n \to \xi$. Für $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ wie in der Cauchy-Bedingung gibt es $N \in \mathbb{N}$

mit $d(\xi, a_n) + d(\xi, x_n) < \delta$ und $D(\eta, f(a_n)) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, und die Dreiecksungleichung liefert

$$D(\eta, f(x_n)) \leq D(\eta, f(a_n)) + D(f(a_n), f(x_n)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Dies impliziert $f(x_n) \to \eta$. $\square$

5.27 Satz (Fortsetzungssatz).
Seien (X, d) und (Y, D) metrische Räume, $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$.

(a) Seien $\tilde{A} = \{\xi \in \overline{A} : f$ hat in ξ einen Grenzwert$\}$ und $\tilde{f} : \tilde{A} \to Y$, $\xi \mapsto \lim\limits_{A \ni x \to \xi} f(x)$. Dann ist $\tilde{f} : \tilde{A} \to Y$ stetig.

(b) Ist f stetig auf A, so ist $A \subseteq \tilde{A}$ und $\tilde{f}|_A = f$, also ist $\tilde{f}$ eine stetige Fortsetzung von f.

(c) Sind (Y, D) vollständig und $f : A \to Y$ gleichmäßig stetig, so gibt es genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \overline{A} \to Y$ mit $\tilde{f}|_A = f$. Diese Fortsetzung ist sogar gleichmäßig stetig auf $\overline{A}$.

Beweis.

(a) Seien $\xi \in \tilde{A}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$ mit $D(\tilde{f}(\xi), f(x)) < \varepsilon/2$ für alle $x \in A$ mit $d(\xi, x) < \delta$. Sei $\zeta \in \tilde{A}$ mit $d(\xi, \zeta) < \delta/2$. Dann gibt es $r > 0$ mit $D(\tilde{f}(\zeta), f(x)) < \varepsilon/2$ für alle $x \in A$ mit $d(\zeta, x) < r$. Wegen $\zeta \in \overline{A}$ gibt es $x \in A$ mit $d(\zeta, x) < \min\{r, \delta/2\}$. Für dieses $x \in A$ gilt dann auch $d(\xi, x) \leq d(\xi, \zeta) + d(\zeta, \xi) < \delta$, und wir erhalten

$$D(\tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\zeta)) \leq D(\tilde{f}(\xi), f(x)) + D(f(x), \tilde{f}(\zeta)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(b) Ist f stetig auf A, so gilt $f(\xi) = \lim\limits_{A \ni x \to \xi} f(x)$ für alle $\xi \in A$, das heißt $A \subseteq \tilde{A}$ und $\tilde{f}|_A = f$.

(c) Die gleichmäßige Stetigkeit von f auf A impliziert (wegen $d(x, y) \leq d(x, \xi) + d(\xi, x)$) die Cauchy-Eigenschaft in jedem $\xi \in \overline{A}$, und wegen 5.26(e) existiert der Funktionsgrenzwert in jedem $\xi \in \overline{A}$, das heißt also $\tilde{A} = \overline{A}$ und $\tilde{f} : \overline{A} \to Y$ ist eine stetige Fortsetzung. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit von Grenzwerten. Für die gleichmäßige Stetigkeit der Fortsetzung wählen wir zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $D(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$ für alle $x, y \in A$ mit $d(x, y) < 2\delta$. Für $\xi, \eta \in \overline{A}$ mit $d(\xi, \eta) < \delta$ gibt es Folgen in A mit $x_n \to \xi$ und $y_n \to \eta$, so dass $d(x_n, y_n) < 2\delta$ für alle n groß genug. Damit folgt

$$D(\tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta)) = \lim_{n \to \infty} D(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$ $\square$

Wir haben in Anschluss vom Satz 5.15 sehr einfache Bespiele gesehen, die zeigen, dass stetige Bilder abgeschlossener oder offener Mengen oft nicht wieder abgeschlossen beziehungsweise offen sind. Für die Abgeschlossenheit kann man aber oft benutzen, dass stetige Bilder kompakter Mengen abgeschlossen sind (Satz 5.17). Der übernächste Satz hilft manchmal, die Offenheit stetiger Bilder zu zeigen. Für dessen Beweis zeigen wir vorher einen allgemeinen *Fixpunktsatz* in vollständigen metrischen Räumen. Für eine Abbildung $T : X \to X$ schreiben wir die n-fachen Kompositionen als Potenzen, also

$$T^n = T \circ \cdots \circ T \text{ mit } n \text{ Faktoren.}$$

Verwechslungen mit gewöhnlichen Potenzen $T(x)^n = T(x) \cdots T(x)$, falls $T(x) \in \mathbb{C}$, sind dabei kaum zu befürchten. Ein Element $x \in X$ heißt *Fixpunkt* von T, falls $T(x) = x$.

5.28 Satz (Banachscher Fixpunktsatz).
Seien (X,d) ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum, $T : X \to X$ eine Abbildung und $c_n \in [0,\infty[$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty \text{ und } d(T^n(x),T^n(y)) \leq c_n d(x,y) \text{ für alle } x,y \in X.$$

Dann hat T genau einen Fixpunkt. Falls $c_1 < 1$ (dann nennt man die Abbildung T eine Kontraktion*) reicht dafür die Bedingung für $n=1$.*

Beweis. Sei $x_0 \in X$ ein beliebiges Element von X. Wir zeigen, dass die durch $x_n = T^n(x_0)$ definierte Folge in X gegen einen Fixpunkt x_∞ konvergiert. Für $n,m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ liefert eine wiederholte Anwendung der Dreiecksungleichung

$$d(x_n,x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k,x_{k+1}) = \sum_{k=n}^{m-1} d(T^k(x_0),T^k(T(x_0))) \leq \sum_{k=n}^{m-1} c_k d(x_0,T(x_0)).$$

Wegen der Cauchy-Bedingung für die konvergente Reihe der c_k erhalten wir also die Cauchy-Bedingung für die Folge x_n, so dass es wegen der Vollständigkeit von X einen Grenzwert x_∞ gibt. Um zu zeigen, dass x_∞ ein Fixpunkt ist, bemerken wir zunächst, dass die Voraussetzung $d(T(x),T(y)) \leq c_1 d(x,y)$ die (sogar gleichmäßige) Stetigkeit von T impliziert, und damit folgt

$$T(x_\infty) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_\infty.$$

Für die Eindeutigkeit betrachten wir zwei Fixpunkte x und y und erhalten dann

$$d(x,y) = d(T^n(x),T^n(y)) \leq c_n d(x,y) \to 0 \text{ wegen der Konvergenz der Reihe der } c_n.$$

Falls schließlich $c_1 < 1$, erhalten wir induktiv $d(T^n(x),T^n(y)) \leq c_1^n d(x,y)$, und wegen der Konvergenz der geometrischen Reihe können wir den schon bewiesenen Fall auf $\tilde{c}_n = c_1^n$ anwenden. □

Es ist bemerkenswert, dass der Satz nicht nur die Existenz von Fixpunkten liefert sondern einen konkreten und sehr einfachen Algorithmus dafür, wie man den Fixpunkt approximieren kann. Aus der ersten Ungleichung im Beweis erhält man für $m \to \infty$ auch eine Fehlerabschätzung für diese Approximationen, nämlich

$$d(x_n,x_\infty) \leq d(x_0,T(x_0)) \sum_{k=n}^{\infty} c_k \text{ und } d(x_n,x_\infty) \leq \frac{d(x_0,T(x_0))}{1-c_1} c_1^n, \text{ falls } c_1 < 1.$$

5.29 Satz (Offenheit kleiner Störungen der Identität).
Seien $(Y,\|\cdot\|)$ ein Banach-Raum und $U \subseteq Y$ offen. Sind $g : U \to Y$ eine Kontraktion und $f : U \to Y$, $x \mapsto x - g(x)$, so ist f injektiv und $f(U \cap A)$ ist offen für jede offene Menge A.

Beweis. Sei $c < 1$ die Kontraktionskonstante von g, das heißt also $\|g(x)-g(y)\| \leq c\|x-y\|$ für alle $x,y \in U$. Wir zeigen zuerst die Injektivität von f. Für $x,y \in U$ mit $f(x) = f(y)$ gilt

$$\|x-y\| = \|g(x)-g(y)\| \leq c\|x-y\|,$$

und dies impliziert $\|x-y\| = 0$ wegen $c < 1$.

Seien nun $x_0 \in A \cap U$ und $r > 0$ mit $\overline{B}(x_0, r) \subseteq U \cap A$ sowie $\varepsilon = (1-c)r$. Wir zeigen mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass es für jedes $z \in B(f(x_0), \varepsilon)$ ein $x \in \overline{B}(x_0, r)$ mit $f(x) = z$ gibt (was dann wegen $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq f(\overline{B}(x_0, r)) \subseteq f(U \cap A)$ die Offenheit von $f(U \cap A)$ beweist). Dazu definieren wir $T : \overline{B}(x_0, r) \to Y$, $x \mapsto x - f(x) + z = g(x) + z$. Um den Fixpunktsatz auf T anwenden zu können, bemerken wir zuerst, dass $X = \overline{B}(x_0, r)$ als abgeschlossene Menge des vollständigen metrischen Raums Y (mit der eingeschränkten Metrik) wiederum ein vollständiger metrischer Raum ist (jede Cauchy-Folge in X ist auch eine in Y, die also gegen ein Element von $\overline{X} = X$ konvergiert). Außerdem benötigen wir, dass T eine Kontraktion von X nach X ist: Für $x, y \in X = \overline{B}(x_0, r)$ berechnen wir dazu

$$\|T(x) - T(y)\| = \|g(x) - g(y)\| \leq c\|x - y\| \text{ und}$$

$$\|T(x) - x_0\| \leq \|T(x) - T(x_0)\| + \|T(x_0) - x_0\| \leq c\|x - x_0\| + \| - f(x_0) + z\| \leq cr + \varepsilon = r.$$

Der Fixpunktsatz liefert somit ein $x \in X$ mit $T(x) = x$, also $f(x) = z$. □

Bemerkung. Wegen Satz 5.15 ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(U) \to U$ stetig. Wir haben für $z_0 = f(x_0)$, hinreichend kleines $r > 0$ und $z \in f(U)$ tatsächlich sogar folgende Implikation gezeigt:

$$\|z - z_0)\| < (1-c)r \;\Rightarrow \|f^{-1}(z) - f^{-1}(z_0)\| \leq r$$

5.30 Ausblick: Metamorphosen

(a) Zwei metrische Räume (X, d) und (Y, D) heißen *homöomorph*, falls es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt, so dass f und f^{-1} beide stetig sind. Dann schreibt man $(X, d) \cong (Y, D)$ oder auch nur $X \cong Y$, falls die Metriken durch den Kontext klar sind (zum Beispiel, falls $X, Y \subseteq \mathbb{C}$).

(b) Es gelten offenbar folgende Regeln:

$$X \cong X,\; X \cong Y \Leftrightarrow Y \cong X \text{ , sowie } X \cong Y \text{ und } Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z.$$

(c) Homöomorphe Räume kann man durch „Biegen, Ziehen, Stauchen und Strecken aber ohne Schneiden und Reißen“ ineinander verformen, und die meisten Eigenschaften bleiben dabei erhalten, insbesondere die Kompaktheit (wegen Satz 5.17). Solche Eigenschaften nennt man *topologische Invarianten*. In diesem Abschnitt entwickeln wir keine ausgereifte Theorie sondern begnügen uns mit einigen Beispielen.

(d) $\mathbb{R} \cong]-1, 1[=]a, b[$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. In der Tat ist $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ eine stetige Bijektion und die Stetigkeit der Umkehrfunktion folgt aus Satz 5.13. Außerdem ist $g :]-1, 1[\to]a, b[$, $t \mapsto \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$ eine stetige Bijektion.

(e) $[0, 1] \not\cong]0, 1[$, weil eine Menge kompakt ist und die andere nicht.

(f) $[0, 1[\not\cong]0, 1[$.

Hier ist es nicht so leicht wie in (e), eine topologische Invariante zu finden. Die Idee ist, dass man aus $[0, 1[$ einen Punkt herausnehmen kann und ein Intervall behält aber aus $]0, 1[$ nicht (wegen des Zwischenwertsatzes). Die topologische Invariante ist also: Es gibt stetiges und injektives $f :]0, 1[\to X$, so dass $X \setminus f(]0, 1[)$ einelementig ist.

(Man könnte übrigens auf die Idee kommen, dass die beiden Mengen auch deshalb nicht homöomorph sind, weil man zu $[0, 1[$ nur einen Punkt hinzunehmen muss, um kompakt zu werden, aber für $]0, 1[$ braucht man zwei Punkte. Dies ist aber nicht wahr, weil $S^1 = \{z \in$

$\mathbb{C} : |z| = 1\}$ kompakt ist und $g :]0,1[\to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi it}$ eine stetige injektive Abbildung mit stetiger Umkehrfunktion $g^{-1} : g(]0,1[) \to]0,1[$ ist, so dass $S^1 \setminus g(]0,1[) = S^1 \setminus \{1\}$.)

(g) Eine weitere interessante topologische Invariante ist der in Aufgabe 5, Blatt 13 eingeführte (wegweise) *Zusammenhang* eines topologischen Raums: Für alle $x, y \in X$ gibt es ein stetiges $\varphi : [0,1] \to X$ mit $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$. Damit sieht man zum Beispiel, dass die Vereinigung zweier disjunkter Kreise nie zu einem einzigen Kreis homöomorph ist. Außerdem kann man damit zeigen, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ nicht homöomorph sind, weil man aus $\mathbb{R}^2$ einen Punkt entfernen kann und einen zusammenhängenden Raum behält aber aus $\mathbb{R}$ (wegen des Zwischenwertsatzes) nicht. Allgemeiner sind für verschiedene Dimensionen n und m die Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ nicht homöomorph, aber ein Beweis dieses Satzes von Brouwer ist schwierig.

(h) $\mathbb{R}^2 \cong]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\cong \mathbb{C} \setminus]-\infty,0]$.

Dabei ist $P :]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{C} \setminus]-\infty,0]$, $(r,\alpha) \mapsto re^{i\alpha}$ ein Homöomorphismus. Man beachte, das diese Polarkoordinatenabbildung als Funktion $P :]0,\infty[\times [-\pi,\pi[\to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zwar bijektiv und stetig ist, aber P^{-1} ist unstetig ($z_n = e^{i(\pi-1/n)} \to -1$ aber $P^{-1}(z_n) = \pi - 1/n \to \pi \neq P^{-1}(-1)$, weil $P^{-1}(-1) = -\pi$).

(i) $]0,\infty[\times [-\pi,\pi[\ncong \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Wir deuten hier die trennende Invariante bloß an: Stetige Bilder der Kreislinie $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ nennt man *geschlossene Kurven*, und der Witz ist, dass man in (der konvexen) Menge $]0,\infty[\times [-\pi,\pi[$ solche Kurven zu einem Punkte „zusammenziehen“ kann, aber in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht. Vornehmer heißt das: Der eine Raum ist 0-*homotop* aber der andere nicht.

KAPITEL 6

Das Riemann-Integral

6.1 Definition des Integrals Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

(a) Eine endliche Menge $\mathscr{P} \subseteq [a,b]$ heißt *Partition* des Intervalls $[a,b]$, falls sie a und b enthält. In diesem Fall schreiben wir $\mathscr{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, falls $\mathscr{P}$ genau $n+1$ Elemente hat. Die Zahl

$$|\mathscr{P}| = \max\{x_k - x_{k-1} : 1 \leq k \leq n\}$$

heißt dann *Feinheit* der Partition.

Ein Vektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt *zulässig* für $\mathscr{P}$, falls $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt. In diesem Fall schreiben wir auch $\xi \sqsubseteq \mathscr{P}$ (dieses Symbol ist allerdings nicht Standard in der Literatur).

(b) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $\mathscr{P} = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ eine Partition und $\xi \sqsubseteq \mathscr{P}$. Dann heißt

$$R(f, \mathscr{P}, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

eine *Riemann-Summe* von f bezüglich $\xi \sqsubseteq \mathscr{P}$. Sie beschreibt im Fall $f(\xi_k) \geq 0$ den Flächeninhalt der Vereinigung von Rechtecken mit Seiten $[x_{k-1}, x_k] \times \{0\}$ und $\{0\} \times [0, f(\xi_k)]$. Für „vernünftiges“ f kann man hoffen, dass diese Gebilde den „Subgraphen“ $S = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$ approximieren und man damit den „Flächeninhalt“ von S als Grenzwert von Riemann-Summen definieren kann. Wir definieren nun „vernünftige Funktionen“ dadurch, dass die Riemann-Summen konvergieren:

(c) Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *integrierbar* (oder genauer: Riemann-integrierbar über $[a,b]$), falls es $I \in \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \xi \sqsubseteq \mathscr{P} \text{ gilt } (|\mathscr{P}| < \delta \Rightarrow |R(f, \mathscr{P}, \xi) - I| < \varepsilon).$$

In diesem Fall schreiben wir $f \in RI(a,b)$ und nennen die Zahl I das *Integral* von f (über $[a,b]$). Außerdem schreiben wir

$$I = \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \int_a^b f(☹)d☹,$$

wobei x oder ☹ irgendein Symbol (die *Integrationsvariable*) ist, das im Kontext noch nicht benutzt wird.

(d) Diese Definition der Integrierbarkeit und des Integrals ist zwar sehr anschaulich aber katastrophal, um selbst einfachste Funktionen zu integrieren. Deshalb sollte man nie versuchen, ein Integral mit Hilfe der Definition zu berechnen (es sei denn im Rahmen der Numerik, wenn man mit Näherungen zufrieden ist und durch theoretische Argumente die Integrierbarkeit zeigen kann, aber selbst dann gibt es bessere Methoden, z. B. die *Trapezregel*, wobei in der Riemann-Summe die Rechtecke durch geeignete Trapeze ersetzt werden).

(e) Konstante Funktionen sind integrierbar und $\int\limits_a^b c\,dx = c(b-a)$.

Für $f(x) = c$ ist nämlich jede Riemann-Summe eine Teleskop-Summe:

$$\begin{aligned} R(f,\mathscr{P},\xi) &= \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(x_n - x_0) = c(b-a). \end{aligned}$$

(f) Seien $a \le r \le s \le b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$, falls $x \notin [r,s]$ und $f(x) = 1$, falls $x \in]r,s[$ (die Werte $f(r)$ und $f(s)$ können beliebig sein). Dann ist $f \in RI(a,b)$ und $\int\limits_a^b f(x)dx = s - r$. Den Beweis lassen wir als Übungsaufgabe.

(g) Die Funktion $f = I_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, also $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$ ist nicht Riemann-integrierbar über $[0,1]$. Sind nämlich $\mathscr{P}$ eine Partition und $\xi \sqsubseteq \mathscr{P}$ mit rationalen Komponenten, so ist wie in (e) die Riemann-Summe gleich 1, und falls alle Komponenten irrational sind, ist $R(f,\mathscr{P},\xi) = 0$. Die Riemann-Summen konvergieren also nicht.

(h) Bevor wir gleich einige Eigenschaften des Integrals zeigen, noch zwei Bemerkungen zu der Definition. Die Beschränktheit von f braucht man nicht vorauszusetzen, sondern sie folgt aus der Konvergenz der Riemann-Summen (der Beweis ist eine eher anspruchsvolle Übungsaufgabe*).

Die Definition und die meisten der folgenden Ergebnisse sind sinnvoll und richtig für Funktionen $f : [a,b] \to X$ mit Werten in einem normierten Raum X statt $\mathbb{C}$. (Man ersetzt einfach den Betrag durch die Norm, das Integral ist dann ein Vektor in X. Genau genommen sollte man in der Riemann-Summe $(x_k - x_{k-1})f(\xi_k)$ schreiben, weil der erste Faktor ein Skalar und der zweite ein Vektor ist.)

*Falls f unbeschränkt ist, gibt es t_j mit $|f(t_j)| \ge j$, und ist $\mathscr{P}$ eine feste Partition, so liegen unendlich viele t_j in einem Teilintervall $[x_{\ell-1}, x_\ell]$. Wir wählen feste Stützstellen ξ_k für $k \ne \ell$ und eine Folge $\xi_\ell^m = t_j$, wobei $j > m$ so gewählt ist, dass $t_j \in [x_{\ell-1}, x_\ell]$. Für die zugehörigen Riemann-Summen gilt dann $|R(f,\mathscr{P},\xi^m)| \to \infty$ $(m \to \infty)$, so dass f nicht integrierbar sein kann.

6.2 Satz.
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b \leq c$.

(a) $RI(a,b)$ ist ein Vektorraum und die Integration $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ ist linear.

(b) Für $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ gilt $f \in RI(a,b) \Leftrightarrow \Re f \in RI(a,b)$ und $\Im f \in RI(a,b)$ und dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \Re f(x)dx + i \int_a^b \Im f(x)dx.$$

(c) Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beide integrierbar mit $f \leq g$, so ist

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(d) Für $f \in RI(a,b)$ gilt $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty$ mit $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$.

(e) Für $f : [a,c] \to \mathbb{C}$ mit $f|_{[a,b]} \in RI(a,b)$ und $f|_{[b,c]} \in RI(b,c)$, ist $f \in RI(a,c)$, und es gilt

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

(f) Sind $f_n \in RI(a,b)$ und gilt $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$, so ist $f \in RI(a,b)$, und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Bemerkung. Die Formel in (e) gilt, falls zwei der Intergrale existieren (dann existiert auch das dritte). Als Folgerung aus dem Satz 6.5 unten erhält man übrigens die Implikation $f \in RI(a,c) \Rightarrow f \in RI(a,b)$, was im Moment nur sehr schwer zu beweisen ist, weil man keinen „Kandidaten" für das Integral über $[a,b]$ hat.

Beweis. Wir zeigen nur (a) und (f), weil die Beweise von (b) - (e) sehr ähnlich sind. Seien $f, g \in RI(a,b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $h = \alpha f + \beta g$ sowie $\varepsilon > 0$. Die Integrierbarkeit von f und g liefert zu $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|+1}$ ein $\delta > 0$, so dass für alle Partitionen $\mathscr{P}$ mit $|\mathscr{P}| < \delta$ und alle $\xi \sqsubseteq \mathscr{P}$ die folgenden Ungleichungen gelten:

$$|R(f, \mathscr{P}, \xi) - \int_a^b f(x)dx| < \tilde{\varepsilon} \text{ und } |R(g, \mathscr{P}, \xi) - \int_a^b g(x)dx| < \tilde{\varepsilon}.$$

Wegen $R(h, \mathscr{P}, \xi) = \alpha R(f, \mathscr{P}, \xi) + \beta R(g, \sqsubseteq, \xi)$ und der Dreiecksungleichung folgt für $I = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$ und alle $\xi \sqsubseteq \mathscr{P}$ mit $|\mathscr{P}| < \delta$, dass $|R(h, \mathscr{P}, \xi) - I| < |\alpha|\tilde{\varepsilon} + |\beta|\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$.

Für den Beweis von (f) zeigen wir zuerst, dass die Integrale $I_n = \int_a^b f_n(x)dx$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ bilden: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ für alle $n \geq N$, und damit auch $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$. Mit (d) folgt daher für $n, m \geq N$

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f_m(x)dx \right| = \left| \int_a^b f_n(x) - f_m(x)dx \right| \leq (b-a)\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ existiert also $I = \lim_{n\to\infty} I_n$, und wir zeigen $I = \int_a^b f(x)dx$. Seien dazu wieder $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ und $|I_n - I| < \varepsilon/3$. Wegen $f_n \in RI(a,b)$ gibt es $\delta > 0$, so dass $\left| R(f_n, \mathscr{P}, \xi) - \int_a^b f_n(x)dx \right| < \varepsilon/3$ für alle $\xi \sqsubseteq \mathscr{P}$ und $|\mathscr{P}| < \delta$. Für solche $\xi \sqsubseteq \mathscr{P}$ folgt dann

$$\begin{aligned} |R(f, \mathscr{P}, \xi) - I| &= |R(f - f_n, \mathscr{P}, \xi)| + |R(f_n, \mathscr{P}, \xi) - I_n| + |I_n - I| \\ &\leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

6.3 Treppen- und Regelfunktionen

(a) Eine Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *Treppenfunktion*, falls es eine Partition $\mathscr{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ gibt, so dass φ auf allen Teilintervallen $]x_{k-1}, x_k[$ konstant ist. Mit $\mathscr{T}(a,b)$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$.

(b) Eine Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist also genau dann eine Treppenfunktion, wenn sie Linearkombination von Funktionen wie in 6.1 (f) ist. Deshalb ist $\mathscr{T}(a,b)$ ein Vektorraum, und wegen 6.1(f) und 6.2(a) ist jede Treppenfunktion φ integrierbar. Ist $c_k = \varphi(t)$ für $t \in\,]x_{k-1}, x_k[$, so gilt darüber hinaus $\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1})$.

(c) Sind φ eine Treppenfunktion und $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ irgendeine Funktion, so ist $G \circ \varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto G(\varphi(x))$ wieder eine Treppenfunktion. Für $\varphi, \psi \in \mathscr{T}(a,b)$ folgt damit wegen $\varphi\psi = ((\varphi+\psi)^2 - \varphi^2 - \psi^2)/2$, dass auch $\varphi\psi$ Treppenfunktion ist. Falls φ und ψ reell sind, ist wegen $\min\{\varphi, \psi\} = (a+b-|a-b|)/2$ auch das Minimum von φ und ψ wieder eine Treppenfunktion.

(d) Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *Regelfunktion*, falls sie *gleichmäßiger* Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen ist. Wegen Satz 6.2(f) sind also Regelfunktionen integrierbar. Wir haben in 5.20 (d) gezeigt, dass jede gleichmäßig stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion ist, aber nach Satz 5.21 ist wegen der Kompaktheit von $[a,b]$ jedes stetige $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ schon gleichmäßig stetig. Deshalb erhalten wir folgenden wichtigen Satz:

6.4 Satz.
Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist integrierbar.

Dieser Satz ermöglicht die Berechnung mancher Integrale, weil man jetzt nur noch sehr spezielle Riemann-Summen ausrechnen muss: Für jede Folge von Partitionen $\mathscr{P}_n$ mit $|\mathscr{P}_n| \to 0$ und alle $\xi^n \sqsubseteq \mathscr{P}_n$ gilt nämlich

$$R(f, \mathscr{P}_n, \xi^n) \to \int_a^b f(x)dx$$

für jedes integrierbare f und insbesondere für jedes stetige. Zum Beispiel gilt (mit $\mathscr{P}_n = \left\{0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = 1\right\}$)

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

6.5 Satz.
Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ zwei reelle Treppenfunktionen φ, ψ auf $[a,b]$ gibt mit

$$\varphi \le f \le \psi \text{ und } \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx < \varepsilon.$$

Beweis. Seien zuerst f integrierbar und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $\xi \sqsubset \mathscr{P}$ und $|\mathscr{P}| < \delta$ die Ungleichung $\left|R(f,\mathscr{P},\xi) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon/2$ gilt. Sei $\mathscr{P} = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ eine Partition mit $|\mathscr{P}| < \delta$. Wir setzen $s_k = \inf\{f(t) : x_{k-1} < t < x_k\}$. Nach Definition des Infimums gibt es $\xi_k \in]x_{k-1}, x_k[$ mit $s_k \le f(\xi_k) \le s_k + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ Wir definieren eine Treppenfunktion φ durch

$$\varphi(t) = s_k \text{ für } t \in]x_{k-1}, x_k[\text{ und } \varphi(x_k) = f(x_k).$$

Dann gilt $\varphi \le f$ und

$$\int_a^b \varphi(x)dx = R(\varphi,\mathscr{P},\xi) \le R(f,\mathscr{P},\xi) \le R\left(\varphi + \tfrac{\varepsilon}{4(b-a)}, \mathscr{P}, \xi\right) = \int_a^b \varphi(x)dx + \varepsilon/4,$$

also $\left|\int_a^b \varphi(x)dx - R(f,\mathscr{P},\xi)\right| < \varepsilon/4$. Dies liefert

$$\left|\int_a^b \varphi(x) - \int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b \varphi(x)dx - R(f,\mathscr{P},\xi)\right| + \left|R(f,\mathscr{P},\xi) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon/2.$$

Analog finden wir eine Treppenfunktion $\psi \ge f$ mit $\left|\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon/2$, und mit der Dreiecksungleichung folgt $0 \le \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx < \varepsilon$.

Sei nun andererseits die Bedingung im Satz erfüllt. Wir definieren (das sogenannte *Oberintegral*)

$$I = \inf\left\{\int_a^b \mu(x)dx : \mu \text{ Treppenfunktion mit } f \le \mu\right\}.$$

Seien $\varepsilon > 0$ und φ, ψ Treppenfunktionen mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int\limits_a^b \psi(x)dx - \int\limits_a^b \varphi(x)dx < \varepsilon/3$. Nach Definition des Infimums gibt es ein $\mu \in \mathscr{T}(a,b)$ mit $f \leq \mu$ und $\int\limits_a^b \mu(x)dx \leq I + \varepsilon/3$. Dann ist auch $\kappa = \min\{\psi, \mu\} \in \mathscr{T}(a,b)$ mit $f \leq \kappa$, und wegen der Monotonie des Integrals folgt

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx \leq I \leq \int\limits_a^b \kappa(x)dx \leq \int\limits_a^b \mu(x)dx \leq I + \varepsilon/3.$$

Als Treppenfunktionen sind φ und κ beide integrierbar, und deshalb gibt es $\delta > 0$, so dass die Riemann-Summen für jede Partition $\mathscr{P}$ mit $|\mathscr{P}| < \delta$ die entsprechenden Integrale von φ und κ bis auf $\varepsilon/3$ approximieren.

Seien nun $\mathscr{P}$ eine Partition mit $|\mathscr{P}| < \delta$ und $\xi \sqsubseteq \mathscr{P}$. Dann gilt wegen $\varphi \leq f \leq \kappa$ auch $R(\varphi, \mathscr{P}, \xi) \leq R(f, \mathscr{P}, \xi) \leq R(\kappa, \mathscr{P}, \xi)$ und wir erhalten (wegen $r \leq s \leq t \Rightarrow |s| \leq \max\{|r|, |t|\}$) die Ungleichung $|R(f, \mathscr{P}, \xi) - I| \leq \max\{|R(\varphi, \mathscr{P}, \xi) - I|, |R(\kappa, \mathscr{P}, \xi) - I|\}$. Der erste Ausdruck ist

$$\begin{aligned} |R(\varphi, \mathscr{P}, \xi) - I| &\leq \left| R(\varphi, \mathscr{P}, \xi) - \int\limits_a^b \varphi(x)dx \right| + \left| \int\limits_a^b \varphi(x)dx - \int\limits_a^b \kappa(x)dx \right| + \left| \int\limits_a^b \kappa(x)dx - I \right| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon, \end{aligned}$$

und der zweite ist

$$|R(\kappa, \mathscr{P}, \xi) - I| \leq \left| R(\kappa, \mathscr{P}, \xi) - \int\limits_a^b \kappa(x)dx \right| + \left| \int\limits_a^b \kappa(x)dx - I \right| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon.$$

Damit haben wir die Integrierbarkeit von f gezeigt. □

6.6 Satz.
Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind $\Phi \circ f$ und fg integrierbar.

Beweis. Sei $f^+ = \max\{f, 0\}$ der Positivteil von f. Wegen $\varphi \leq f \leq \psi \Longrightarrow \varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+$ und $\psi^+ - \varphi^+ \leq \psi - \varphi$ folgt aus Satz 6.5 die Integrierbarkeit von f^+ und wegen der Linearität auch die von $|f| = 2f^+ - f$.

Wir wollen nun zeigen, dass f^2 integrierbar ist. Als integrierbare Funktion ist $|f|$ beschränkt, so dass es $M > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a,b]$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Satz 6.5 gibt es reelle Treppenfunktionen φ und ψ mit $\varphi \leq |f| \leq \psi$ und $\int\limits_a^b \psi(x) - \varphi(x)dx < \varepsilon/2M$. Durch eventuellen Übergang zu $\max\{\varphi, 0\}$ und $\min\{\psi, M\}$ können wir $\varphi \geq 0$ und $\psi \leq M$ annehmen. Die Monotonie der Quadratfunktion auf $\mathbb{R}_+$ liefert $\varphi^2 \leq |f|^2 \leq \psi^2$, und wegen 6.3 (c) sind φ^2 und ψ^2 wieder Treppenfunktionen mit $0 \leq \psi^2 - \varphi^2 = (\psi + \varphi)(\psi - \varphi) \leq 2M(\psi - \varphi)$, also

$$\int_a^b \psi^2(x)dx - \int_a^b \varphi^2(x)dx \leq 2M \int_a^b \psi(x) - \varphi(x)dx < \varepsilon.$$

Also ist $f^2 = |f|^2$ nach Satz 6.5 integrierbar.

Die Integrierbarkeit von fg folgt nun aus $fg = ((f+g)^2 - f^2 - g^2)/2$. Induktiv erhalten wir, dass $p \circ f$ für jedes Polynom p integrierbar ist. Wegen des Weierstraßschen Approximationssatzes 5.22 gibt es eine Folge von Polynomen p_n, die gleichmäßig auf $[-M, M]$ gegen Φ konvergiert, so dass $\Phi \circ f$ als gleichmäßiger Grenzwert der Folge $p_n \circ f$ integrierbar ist. □

Bemerkung. Der Satz gilt auch für komplexe integrierbare Funktion f und $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Dazu benötigt man eine mehrdimensionale Version des Satzes von Weierstraß (die man sehr ähnlich wie in 5.22 beweist, worauf wir allerdings hier verzichten).

6.7 Satz (Hölder- und Minkowski-Ungleichung).
Für $f \in RI(a,b)$ und $1 \le p < \infty$ sei $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$

(a) Falls $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt für alle $f, g \in RI(a,b)$ die Ungleichung $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$

(b) Für $f, g \in RI(a,b)$ und alle $p \in [1, \infty[$ gilt $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

Beweis. Wegen Satz 6.6 sind $|f|^p$ und $|fg|$ integrierbar, so dass die Ausdrücke $\|f\|_p$ und $\|fg\|_1$ definiert sind. Der Beweis ist nun der selbe wie der von Satz 5.10, indem man die Summen dort durch Integrale ersetzt. □

6.8 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung).
Seien $g \in RI(a,b)$ positiv und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Insbesondere gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx) = f(\xi)$.

Beweis. Als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ nimmt f die Extrema an, und wir setzen

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \text{ und } M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Wegen $g \ge 0$ ist dann $mg \le fg \le Mg$, und die Monotonie des Integrals liefert

$$m \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M \int_a^b g(x)dx.$$

Also gibt es ein $\mu \in [m, M]$ mit $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$. Weil m und M zwei Werte von f sind, liefert der Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a,b]$ mit $\mu = f(\xi)$. □

6.9 Das unbestimmte Integral

(a) Mit Satz 6.6 haben wir zwar recht nützliche Integrierbarkeitskriterien, die aber nur sehr bedingt zur *Berechnung* von Integralen taugen (immerhin muss man nicht mehr *alle* Riemann-Summen untersuchen, sondern nur noch eine spezielle Folge).

(b) Der Trick, um Integrale $\int\limits_a^b f(x)dx$ zu berechnen, ist die Integrationsgrenze zu variieren, das heißt die Funktion

$$F : [a,b] \to \mathbb{C}, z \mapsto \int\limits_a^z f(x)dx$$

zu untersuchen. Oft will man das Argument wieder mit x bezeichnen und muss dann eine andere Integrationsvariable benutzen, also zum Beispiel $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Wegen Satz 6.2(e) erfüllt diese Funktion für $x < y$

$$F(y) - F(x) = \int\limits_a^y f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^y f(t)dt.$$

Ist f nicht bloß integrierbar auf $[a,b]$ sondern sogar stetig, so liefert der Mittelwertsatz 6.8 ein ξ zwischen x und y mit

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(\xi).$$

Für festes x liefert erneut die Stetigkeit

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x).$$

Diesen Grenzwert werden wir im nächsten Kapitel die *Ableitung* von F nennen und mit Hilfe von Ergebnissen über solche Ableitungen viele Integrale berechnen.

KAPITEL 7

Differentialrechnung

7.1 Die Ableitung

(a) Seien $A \subseteq \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ eine Abbildung und $\xi \in A$, so dass es eine Folge $x_n \in A \setminus \{\xi\}$ mit $x_n \to \xi$ gibt (dann heißt ξ ein *Häufungspunkt* von A). Die Funktion heißt *differenzierbar* in ξ, falls der Grenzwert

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

in $\mathbb{C}$ existiert. In diesem Fall heißt die Zahl $f'(\xi)$ *Ableitung* von f in ξ.

(b) Genau genommen betrachtet man den Grenzwert $A \setminus \{\xi\} \ni x \to \xi$. Weil aber der Quotient für $x = \xi$ oder $x \notin A$ gar nicht definiert ist, benutzen wir obige Schreibweise. Nach Definition 5.26(a) bedeutet die Differenzierbarkeit also

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in A \setminus \{\xi\} \text{ gilt } \left(|x - \xi| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - f'(\xi) \right| < \varepsilon \right).$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in A \text{ gilt } \big(|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi) - f'(\xi)(x - \xi)| \leq \varepsilon |x - \xi| \big).$$

(c) Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ ist der *Differenzquotient* $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ die Steigung der *Sekante* des Graphen in x und ξ, also der Geraden durch $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$. Falls f in ξ differenzierbar ist, interpretiert man $f'(\xi)$ als *Tangentensteigung* und die Geradenfunktion $\tau(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$ als *Tangente* in ξ. Diese Tangente ist in der Nähe von ξ eine sehr gute Approximation an f, weil $\frac{f(x)-\tau(x)}{x-\xi} \to 0$ (beachte, dass der Nenner gegen 0 konvergiert, der Zähler muss also „schneller“ klein werden). Falls f die Bewegung eines Teilchens beschreibt, so ist $f'(\xi)$ die Geschwindigkeit zur Zeit ξ.

(d) Differenzierbarkeitskriterium. $f : A \to \mathbb{C}$ ist genau dann in ξ differenzierbar, wenn es eine in ξ stetige Funktion $\varphi : A \to \mathbb{C}$ gibt mit $f(x) - f(\xi) = (x - \xi)\varphi(x)$. In diesem Fall ist $\varphi(\xi) = f'(\xi)$.

Beweis. Ist f differenzierbar in ξ, so definieren wir $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}, & x \neq \xi \\ f'(\xi), & x = \xi \end{cases}$. Die Differenzierbarkeit bedeutet dann genau die Stetigkeit von φ in ξ. Hat man andererseits eine Darstellung wie in dem Kriterium, so gilt $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \varphi(x) \to \varphi(\xi)$ für $x \to \xi$ wegen der Stetigkeit von φ in ξ. Also ist f differenzierbar mit $f'(\xi) = \varphi(\xi)$. □

(e) Hier einige Beipiele:

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x^n$ in jedem Punkt $\xi \in \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f'(\xi) = n\xi^{n-1}$.

Beweis. Im Anschluss an 3.5 hatten wir (als kleine Verallgemeinerung der geometrischen Summenformel)

$$x^n - \xi^n = (x-\xi)\sum_{k=0}^{n-1} x^k \xi^{n-1-k}$$

gezeigt. Die Funktion $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k \xi^{n-1-k}$ ist als Polynom stetig mit $\varphi(\xi) = n\xi^{n-1}$. Mit dem Kriterium (d) folgt die Differenzierbarkeit. □

(2) In 5.26(d) haben wir gezeigt, dass die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in jedem Punkt $\xi \in \mathbb{C}$ differenzierbar ist mit

$$\boxed{\exp'(\xi) = \exp(\xi).}$$

(3) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Dann besagt 6.9(b), dass F in jedem Punkt $\xi \in [a,b]$ differenzierbar ist mit $F'(\xi) = f(\xi)$.

(4) Die Funktion $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist in jedem Punkt $\xi \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ differenzierbar mit $f'(\xi) = -\frac{1}{\xi^2}$. In der Tat ist durch Erweitern mit $x\xi$

$$\frac{1/x - 1/\xi}{x-\xi} = \frac{1}{x\xi}\frac{\xi - x}{x-\xi} = -\frac{1}{x\xi} \to -\frac{1}{\xi^2}.$$

(5) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist in jedem Punkt $\xi \neq 0$ differenzierbar und in $\xi = 0$ nicht differenzierbar.
In der Tat, falls $\xi \neq 0$ ist $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ für alle $|x-\xi| < |\xi|$ konstant gleich 1 oder -1 je nachdem, ob $\xi > 0$ oder $\xi < 0$. Also existiert der Grenzwert für $x \to \xi$. Andererseits hat $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ keinen Grenzwert in 0.

(6) Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto |x|$ ist in *keinem* Punkt $\xi \in \mathbb{C}$ differenzierbar! Wir zeigen dafür zunächst:

Jede *reellwertige* Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, die in einem Punkt ξ differenzierbar ist, erfüllt dort $f'(\xi) = 0$.

Wegen $f'(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\xi+1/n)-f(\xi)}{1/n}$ ist nämlich $f'(\xi) \in \mathbb{R}$, und andererseits ist wegen $f'(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\xi+i/n)-f(\xi)}{i/n}$ auch $if'(\xi) \in \mathbb{R}$, was $f'(\xi) = 0$ impliziert.
Für $f(x) = |x|$ und $\xi \neq 0$ ist aber für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{f(\xi + \xi/n) - f(\xi)}{\xi/n} = \frac{|\xi|}{\xi},$$

so dass f nicht ξ differenzierbar ist. Dass f nicht in $\xi = 0$ differenzierbar ist, folgt aus $\frac{f(1/n)-f(0)}{1/n-0} = 1 \neq 0$.

(f) Die letzten zwei Beispiele zeigen, dass Differenzierbarkeit für Funktionen auf $\mathbb{R}$ beziehungsweise $\mathbb{C}$ ziemlich unterschiedliche Eigenschaften sind (ein $\xi \in \mathbb{C}$ lässt sich nämlich aus sehr vielen Richtungen approximieren während es in $\mathbb{R}$ bloß Links und Rechts gibt). Dies spiegelt sich auch darin wieder, dass für $A \subseteq \mathbb{R}$ und in $\xi \in A$ differenzierbares $f : A \to \mathbb{C}$

sowohl $\Re f$ als auch $\Im f$ in ξ differenzierbar sind mit

$$f'(\xi) = \Re f'(\xi) + i\Im f'(\xi),$$

während für $A \subseteq \mathbb{C}$ Real- und Imaginärteil sehr oft nicht differenzierbar sind.

7.2 Satz (Ableitungsregeln).
Seien $f, g : A \to \mathbb{C}$ zwei in $\xi \in A$ differenzierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

(a) f ist stetig in ξ.

(b) $\alpha f + \beta g$ ist differenzierbar in ξ mit $(\alpha f + \beta g)'(\xi) = \alpha f'(\xi) + \beta g'(\xi)$.

(c) fg ist differenzierbar in ξ mit $(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + g'(\xi)f(\xi)$.

(d) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$, so ist f/g differenzierbar in ξ mit

$$(f/g)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - g'(\xi)f(\xi)}{g^2(\xi)}$$

(e) Ist $h : g(A) \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $g(\xi)$, so ist $h \circ g$ differenzierbar in ξ mit

$$(h \circ g)'(\xi) = h'(g(\xi))g'(\xi) \text{ (Kettenregel).}$$

Bemerkung. Die Kettenregel ist von herausragender Bedeutung bei der Berechnung von Ableitungen. Zum Beispiel erhalten wir die Differenzierbarkeit in jedem Punkt der Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \exp(x^2)$ und $f'(\xi) = \exp(\xi^2)2\xi$. Hier schreibt man $f = \exp \circ g$ mit $g(x) = x^2$ und benutzt die Beispiele in 7.1(e). In der Praxis schreibt man die Rechnung häufig wie folgt:

$$(\exp(x^2))' = \exp'(x^2)(x^2)' = \exp(x^2)2x.$$

Allerdings ist diese Schreibweise sinnlos, sofern man x als ein festes Element von $\mathbb{C}$ auffasst! Dann ist nämlich $\exp(x^2)$ eine Zahl, aber wir differenzieren ja nicht eine Zahl sondern eine Funktion. Um die Schreibweise zu rechtfertigen, muss man x als „Variable“ auffassen, also als die identische Abbildung $x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, und $f(x)$ nicht als einen Wert sondern (wie in 2.7(a) definiert) als die *Verknüpfung* $f \circ x$. Für $\xi \in \mathbb{C}$ findet man in der Literatur statt der formal korrekten aber womöglich irritierenden Schreibweise $f(x)(\xi)$ auch $f(x)|_{x=\xi}$ (beide Zahlen sind gleich $f(\xi)$).

Beweis.

(a) Ist φ die in ξ stetige Funktion gemäß 7.1 (d), so ist $f(x) = f(\xi) + (x - \xi)\varphi(x)$ ebenfalls stetig in ξ.

(b) folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte.

(c) Wir schreiben

$$\frac{f(x)g(x) - f(\xi)g(\xi)}{x - \xi} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}g(x) + f(\xi)\frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}.$$

Wegen der Stetigkeit von g liefern die Rechenregeln für Grenzwerte die Konvergenz gegen $f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi)$.

(d) Wegen (c) reicht es $(1/g)'(\xi) = -\frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2}$ zu zeigen, und dies folgt durch Erweitern mit $g(x)g(\xi)$ aus

$$\frac{1/g(x) - 1/g(\xi)}{x-\xi} = \frac{-1}{g(x)g(\xi)} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} \to -\frac{1}{g(\xi)^2} g'(\xi).$$

(e) Seien φ und ψ wie im Kriterium 7.1(d), also $f(x)-f(\xi) = (x-\xi)\varphi(x)$ und $g(y)-g(f(\xi)) = (y-f(\xi))\psi(y)$. Dann gilt

$$g(f(x)) - g(f(\xi)) = (f(x)-f(\xi))\psi(f(x)) = (x-\xi)\varphi(x)\psi(f(x)).$$

Die Funktion $x \mapsto \varphi(x)\psi(f(x))$ ist wiederum stetig in ξ, und das Kriterium liefert die Differenzierbarkeit von $g \circ f$ mit $(g\circ f)'(\xi) = \varphi(\xi)\psi(f(\xi)) = f'(\xi)g'(f(\xi))$. □

7.3 Beispiele. Wir können nun viele Ableitungen ausrechnen. Wir nennen $f : A \to \mathbb{C}$ differenzierbar auf A (oder auch in A), falls f in jedem Punkt $\xi \in A$ differenzierbar ist. Dann ist also $f' : A \to \mathbb{C}$, $\xi \mapsto f'(\xi)$ wieder eine Funktion, und wir bezeichnen das Argument meistens wieder mit x statt ξ.

(a) Sinus und Cosinus sind differenzierbar auf $\mathbb{C}$ mit

$$\boxed{\sin'(x) = \cos(x) \text{ und } \cos'(x) = -\sin(x)}$$

Dies folgt aus $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ und $(e^{ax})' = \exp'(ax)(ax)' = ae^{ax}$.

(b) Der Tangens $\tan : A \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ mit $A = \mathbb{C} \setminus \{(n+1/2)\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ ist auf A differenzierbar mit

$$\boxed{\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)}$$

Wegen der Quotientenregel ist nämlich

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Genauso berechnet man:

(c) Der Cotangens $\operatorname{cotan} : B \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ mit $B = \mathbb{C} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ ist auf B differenzierbar

$$\boxed{\operatorname{cotan}'(x) = -(1 + \operatorname{cotan}^2(x))}$$

(d) Wir wollen nun den Logarithmus $\log :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ differenzieren. Nach Definition des Logarithmus als Umkehrfunktion von $\exp|_{\mathbb{R}}$ gilt $x = \exp(\log(x))$ für alle $x \in]0,\infty[$.

Wenn wir schon wüssten, das log differenzierbar ist, könnten wir mit der Kettenregel rechnen:

$$1 = x' = \exp'(\log(x))\log'(x) = \exp(\log(x))\log'(x) = x\log'(x),$$

was $\log'(x) = \frac{1}{x}$ liefert. Um dieses Argument zu rechtfertigen, zeigen wir folgenden Satz:

7.4 Satz (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion).
Seien $f : A \to B$ ein Bijektion und $\xi \in A$, so dass f in ξ differenzierbar ist. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$ ist genau dann in $\eta = f(\xi)$ differenzierbar, wenn sie dort stetig ist und $f'(\xi) \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$, also auch $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}$.

Bemerkung. Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist und $f : A \to \mathbb{R}$ auf ganz A stetig, so ist $f^{-1} : f(A) \to A$ nach Satz 5.13 automatisch stetig. Das gleiche gilt nach Satz 5.17(b), falls $A \subseteq \mathbb{C}$ kompakt ist.

Beweis. Die Notwendigkeit der Stetigkeit haben wir in Satz 7.1 (a) gezeigt, und dass $f'(\xi) \neq 0$ erhalten wir wie in 7.3(d) aus der Kettenregel: $1 = (f^{-1} \circ f)'(\xi) = (f^{-1})'(f(\xi))f'(\xi)$.

Sei andererseits $\varphi : A \to \mathbb{C}$ stetig in ξ mit $f(x) - f(\xi) = (x - \xi)\varphi(x)$. Dann ist wegen der Injektivität $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \neq \xi$ und $\varphi(\xi) = f'(\xi) \neq 0$ nach Voraussetzung. Also ist $\psi(y) = 1/\varphi(f^{-1}(y))$ stetig in η, und für $y = f(x) \in B$ gilt

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta) = x - \xi = \frac{f(x) - f(\xi)}{\varphi(x)} = (y - \eta)\psi(y).$$

Also ist f^{-1} differenzierbar mit $(f^{-1})'(\eta) = \psi(\eta) = \frac{1}{\varphi(\xi)} = \frac{1}{f'(\xi)}$. □

7.5 Beispiele

(a) $\log :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ ist auf $]0, \infty[$ differenzierbar mit

$$\boxed{\log'(x) = 1/x}$$

(b) Wir zeigen bald, dass $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ eine Bijektion ist. Deren Umkehrfunktion heißt *Arcussinus* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, und Satz 7.4 liefert die Differenzierbarkeit von arcsin auf $] - 1, 1[$ mit

$$\boxed{\arcsin'(y) = \tfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

Es ist nämlich

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

(c) Der Tangens ist auf $] - \pi/2, \pi/2[$ eine Bijektion $\tan :] - \pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$, und die Umkehrfunktion heißt $\arctan : \mathbb{R} \to] - \pi/2, \pi/2[$. Sie ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\boxed{\arctan'(y) = \tfrac{1}{1+y^2}.}$$

7.6 Satz (Extremalitätskriterium).
Seien $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ und ξ ein innerer Punkt von A, das heißt $]\xi - r, \xi + r[\subseteq A$ für ein $r > 0$. Falls f in ξ differenzierbar ist und

$$f(\xi) = \max\{f(x) : x \in A\} \text{ oder } f(\xi) = \min\{f(x) : x \in A\},$$

dann gilt $f'(\xi) = 0$.

Bemerkung.

(a) Für $\mathbb{C}$-wertiges f hat der Satz kein sinnvolles Analogon, weil es in $\mathbb{C}$ keine natürliche Ordnung gibt und von max und min keine Rede sein kann.

(b) Sind ξ innerer Punkt von $A \subseteq \mathbb{C}$ und f eine *reelle* in ξ differenzierbare Funktion, so gilt nach dem letzten Beispiel in 7.1(e) sowieso $f'(\xi) = 0$, so dass der Satz zwar nicht falsch ist aber völlig uninteressant.

(c) Ist ξ kein innerer Punkt, so ist der Satz falsch, wie das Beispiel $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ zeigt.

Beweis. Wir beweisen den Fall $f(\xi) = \max f(A)$, der andere folgt dann mit $g(x) = -f(x)$. Für $x \in \,]\xi, \xi + r[$ ist $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$, weil $f(\xi) \geq f(x)$, und damit folgt $f'(\xi) \leq 0$. Andererseits ist für $x \in \,]\xi - r, \xi[$ der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ als Quotient zweier negativer Zahlen positiv, und dies liefert $f'(\xi) \geq 0$. □

7.7 Kritische Punkte

(a) Ein innerer Punkt ξ von A mit $f'(\xi) = 0$ heißt *kritischer Punkt*. Ist $f : A \to \mathbb{R}$ in $\mathring{A}$ differenzierbar, so braucht man bei der Suche nach den Extrema also nur noch die kritischen Punkte und die $\xi \notin \mathring{A}$ zu untersuchen. Dabei kann es natürlich vorkommen, dass die Extrema gar nicht angenommen werden, zum Beispiel für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, deren einziger kritischer Punkt $\xi = 0$ ist.

Ist allerdings A kompakt, so werden nach Satz 5.17(c) für stetiges f die Extrema $\inf f(A)$ und $\sup f(A)$ angenommen. Weil außerdem bis auf die Randpunkte alle Elemente eines Intervalls innere Punkte sind, erhalten wir damit folgende wichtige Konsequenz von 7.6:

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und in $]a,b[$ differenzierbar. Dann existieren

$$\max\{f(x) : x \in [a,b]\} = \max\{f(x) : x \in \{a,b\} \text{ oder } x \text{ kritisch}\} \text{ und}$$
$$\min\{f(x) : x \in [a,b]\} = \min\{f(x) : x \in \{a,b\} \text{ oder } x \text{ kritisch}\}.$$

(c) Wir suchen $\sup\{xe^{-x} : x \in [0,\infty[\}$ und berechnen dazu zunächst die kritischen Punkte. Wegen

$$(xe^{-x})' = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$$

ist $\xi = 1$ der einzige kritische Punkt. Nun ist aber $[0,\infty[$ nicht kompakt, so dass man für die Anwendung von (b) einen Trick braucht. Wegen $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^2}{2}$ für $x \geq 0$, ist $xe^{-x} < \frac{2}{x} \leq 1/e$ für alle $x \geq b = 2e$. Die Aussage in (b) liefert wegen $0e^{-0} = 0$ und $be^{-b} < 1/e$, dass $\sup\{xe^{-x} : x \in [0,b]\} = e^{-1}$, und wegen obiger Abschätzung für $x \geq b$ ist auch das Supremum über $[0,\infty[$ gleich $1/e$.

7.8 Mittelwertsatz der Differentialrechnung Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei reellwertige stetige Funktionen, die in $]a, b[$ differenzierbar sind mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in\,]a, b[$. Dann gibt es $\xi \in\,]a, b[$ mit
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$
Insbesondere gibt es ein $\xi \in\,]a, b[$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

In der Literatur wird oft nur der Spezialfall $g(x) = x$ Mittelwertsatz genannt, für anderer Funktionen g heißt die Aussage dann *verallgemeinerter Mittelwertsatz*.

Beweis. Wir zeigen zuerst den Fall $g(x) = x$ und $f(a) = f(b)$ (Satz von Rolle nach Michel Rolle, wobei das e stumm ist). Wegen $f(b) - f(a) = 0$ müssen wir zeigen, dass f kritische Punkte hat. Anderfalls nähme f wegen 7.7(b) sowohl Minimum als auch Maximum in a oder b an, was wegen $f(a) = f(b)$ impliziert, dass f konstant ist, so dass $f'(x) = 0$ für alle $x \in\,]a, b[$, im Widerspruch zum angenommenen Mangel an kritischen Punkten.

Für den allgemeinen Fall definieren wir $h(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$, so dass $h(b) - h(a) = 0$. Der Satz von Rolle liefert ein $\xi \in\,]a, b[$ mit
$$0 = h'(\xi) = g'(\xi)(f(b) - f(a)) - f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$
Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in\,]a, b[$ zeigt erneut der Satz von Rolle $g(a) \neq g(b)$, und Umstellen obiger Identität liefert die Behauptung. □

7.9 Bemerkungen zum Mittelwertsatz

(a) Nach Definition der Ableitung (etwa als Tangentensteigung) liefert $f'(x)$ nur den „infinitesimalen Anstieg“ während $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ den tatsächlichen Anstieg im Intervall endlicher Länge $[a, b]$ beschreibt. Dieser endliche Anstieg ist also gleich einem infinitesimalen Anstieg, was der französischen Bezeichnung „théorème des accroissements finis“ zugrunde liegt.

Geometrisch bedeutet dies, dass die Sekantensteigung (der Geraden durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$) gleich einer Tangentensteigung ist, das heißt, dass die Geraden parallel sind.

Eine sehr einfache aber wichtige Konsequenz des Mittelwertsatzes ist:

(b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige und in $]a, b[$ differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in\,]a, b[$. Dann ist f konstant.

Beweis. Für reelles f wendet man den Mittelwertsatz auf $f|_{[\alpha,\beta]}$ für alle $a < \alpha < \beta < b$ an und erhält $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha) = 0$. Für eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion wendet man dies auf Real- und Imaginärteil an (weil der Definitionsbereich von f reell ist, sind die Real- und Imaginärteile nach 7.1 (f) wieder differenzierbar). □

(c) Auch wenn diese Folgerung für $\mathbb{C}$-wertige Abbildungen gilt, ist der Mittelwertsatz selbst für komplexwertiges f falsch! Als wichtiges Beispiel betrachten wir dazu die Funktion
$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, x \mapsto \exp(ix).$$
Dann ist $f(0) = f(2\pi) = 1$ aber $f'(x) = ie^{ix}$ hat keine Nullstelle. Häufig kann man folgende Aussage als „Ersatz“ für den in $\mathbb{C}$ falschen Mittelwertsatz benutzen:

(d) MITTELWERTUNGLEICHUNG. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in\,]a,b[$ mit

$$|f(b) - f(a)| \le |f'(\xi)|(b-a).$$

BEWEIS. Seien $z = f(b) - f(a)$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \Re(f(x)\bar{z})$. Dann gibt es wegen des Mittelwertsatzes ein $\xi \in\,]a,b[$ mit $g(b) - g(a) = g'(\xi)(b-a)$. Andererseits ist

$$g(b) - g(a) = \Re(f(b)\bar{z}) - \Re(f(a)\bar{z}) = \Re(z\bar{z}) = |f(b) - f(a)|^2 \text{ und}$$

$$|g'(\xi)| = |\Re(f'(\xi)\bar{z})| \le |f'(\xi)||\bar{z}| = |f'(\xi)||f(b) - f(a)|. \qquad \square$$

(e) Für Funktionen $f : A \to \mathbb{C}$ mit $A \subseteq \mathbb{C}$ müssen wir zunächst ein Analogon zur Voraussetzung aus dem Mittelwertsatz finden, dass f auf einem *Intervall* definiert ist. Wir nennen $A \subseteq \mathbb{C}$ *konvex*, falls für alle $x, y \in A$ und alle $t \in [0,1]$ auch $tx + (1-t)y \in A$ gilt, das heißt, dass die Funktion $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto y + t(x-y)$ nur Werte in A hat.

(f) Seien $A \subseteq \mathbb{C}$ konvex und $f : A \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Dann gibt es für alle $x, y \in A$ ein $\xi \in A$ mit

$$|f(y) - f(x)| \le |f'(\xi)||y-x|.$$

BEWEIS. Wir wenden den Teil (d) auf die Funktion $g = f \circ \varphi$ mit obigem φ an und erhalten wegen $\varphi'(t) = x - y$ mit der Kettenregel ein $s \in\,]0,1[$

$$|f(y) - f(x)| = |g(0) - g(1)| \le |g'(s)| = |f'(\varphi(s))||x-y|.$$

Dies ist die Behauptung für $\xi \in \varphi(s)$. $\square$

7.10 Satz (Monotonie).
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar.

(a) f ist genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \ge 0$ für alle $x \in\,]a,b[$.

(b) Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in\,]a,b[$, ist f streng monoton wachsend.

Bemerkung. Durch Anwendung auf $-f$ erhält man eine analoge Aussage für monoton fallende Funktionen. Die Umkehrung in (b) ist falsch, wie das Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ zeigt (f ist zwar streng monoton aber $f'(0) = 0$).

BEWEIS. Für monoton wachsendes f und $\xi \in\,]a,b[$ ist für $x > \xi$ der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \ge 0$, so dass auch $f'(\xi)$ als Grenzwert positiv ist. Seien andererseits $a \le \alpha < \beta \le \beta$. Der Mittelwertsatz für $f|_{[\alpha,\beta]}$ liefert $\xi \in\,]\alpha,\beta[$ mit

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha) \ge 0, \text{ da } f'(\xi) \ge 0.$$

Ist $f'(\xi)$ echt positiv, so folgt $f(\beta) > f(\alpha)$. $\square$

Beispiele.

(a) Wie in 7.5(b) angekündigt, erhalten wir jetzt, dass $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$ streng monoton wächst, weil $\sin' = \cos$ in $]-\pi/2,\pi/2[$ echt positiv ist. Wegen $\sin(\pm\pi/2) = \pm 1$ liefert der Zwischenwertsatz wie in 7.3 (a) angekündigt, dass der Sinus eine Bijektion $[-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1]$ ist.

(b) Mit Hilfe der Monotonie lassen sich oft Ungleichungen für Funktionen beweisen, zum Beispiel

$$\boxed{x - \log(1+x) \le x^2/2 \text{ für alle } x \ge 0.}$$

Die Funktion $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2/2 - x + \log(1+x)$ erfüllt nämlich $f(0) = 0$ und

$$f'(x) = x - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}((x-1)(x+1)+1) = \frac{x^2}{1+x} \ge 0.$$

Also ist f monoton wachsend, so dass $f(x) \ge f(0) \ge 0$.

7.11 Verallgemeinerte Grenzwerte.

(a) Um die Definition des Funktionsgrenzwerts aus 5.26 auf Limiten für $x \to \pm\infty$ zu verallgemeinern, müssen wir definieren was „nah bei $\pm\infty$" heißen soll. So wie in $\mathbb{R}$ (oder allgemeinen metrischen Räumen) die Kugel $B(\xi,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-\xi| < \varepsilon\}$ die Menge der ε-Approximation an ξ ist, definieren wir (für typischer weise kleines $\varepsilon > 0$)

$$B(\infty,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : x > 1/\varepsilon\} \text{ und } B(-\infty,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : x < -1/\varepsilon\}$$

als die Mengen der ε-Approximation an ∞ und $-\infty$.

(b) Für $a \in [-\infty,\infty[$, $\eta \in [-\infty,\infty]$ und $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ für ein $b > a$ schreiben wir also $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \eta$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in]a,b[\text{ gilt } (x \in B(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in B(\eta,\varepsilon)).$$

Analog definiert man $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ und schreibt dann $f(x) \to \eta$ für $x \to a$ beziehungsweise $x \to b$. Will man betonen, dass man f auf dem offenen Intervall $]a,b[$ betrachtet, schreibt man auch $\lim\limits_{a<x\to a} f(x)$ oder $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ sowie $f(x) \to \eta$ für $x \to a+$ und nennt η den *rechtsseitigen Grenzwert*. Analog schreibt man $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ für *linksseitige Grenzwerte.*

7.12 Satz (Regel von l'Hospital).
Seien $a,b \in [-\infty,\infty]$ mit $a < b$ und $f,g :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $]a,b[$ mit $g'(x) \ne 0$ für alle $x \in]a,b[$. Es gelte außerdem (1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ oder (2) $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$. Falls $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und ist gleich $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Eine analoge Version gilt natürlich auch für linksseitige Grenzwerte für $x \to b$. In manchen Büchern findet man übrigens auch die Schreibweise *l'Hôpital*, der Zirkumflex-Akzent ist allerdings ein Anachronismus, der zu l'Hospitals Zeit (1661-1704) nicht benutzt wurde. Eigentlich müsste der Satz eher nach Johann Bernoulli benannt sein, der L'Hospital Privatstunden erteilt hat.

Beweis. Wir nehmen zunächst die Voraussetung (1) an. Falls $a \in \mathbb{R}$, so setzen wir f und g auf $[a,b[$ fort, indem wir $f(a) = g(a) = 0$ definieren. Dann sind also $f,g : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ stetig für jedes $\beta < b$, und der Mittelwertsatz liefert für $x \in]a,\beta[$ ein $\xi = \xi(x) \in]a,x[$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Damit folgt die Existenz von $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Sei nun $a = -\infty$ und zur Vereinfachung der Notation $b < 0$. Wir betrachten die „Substitution" $\varphi :]0, -1/b[\, \to\,]-\infty, b[$, $x \mapsto -1/x$ sowie $\tilde{f} = f \circ \varphi$ und $\tilde{g} = g \circ \varphi$. Wegen der Kettenregel ist dann

$$\frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)} = \frac{f'(\varphi(x))\varphi'(x)}{g'(\varphi(x))\varphi'(x)} = \frac{f'(\varphi(x))}{g'(\varphi(x))}.$$

Wegen $\varphi(x) \in B(-\infty, \delta) \Leftrightarrow x \in B(0, \delta)$ liefert der schon bewiesene Fall $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \eta$, und damit folgt $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$.

Im Fall (2) schreiben wir für $a < x < \alpha$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} \left(1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}\right) + \frac{f(\alpha)}{g(x)} = \frac{f'(\xi(\alpha, x))}{g'(\xi(\alpha, x))} \left(1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}\right) + \frac{f(\alpha)}{g(x)}$$

für ein $\xi(\alpha, x)$ zwischen x und α wegen des Mittelwertsatzes. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir zunächst $\alpha > a$, so dass $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in B(\eta, \varepsilon/2)$ für alle $\xi \in]a, \alpha[$, und dann $\delta > \alpha$, so dass $s = \frac{g(\alpha)}{g(x)}$ und $t = \frac{f(\alpha)}{g(x)}$ für alle $x \in B(a, \delta)$ so klein sind, dass

$$z \in B(\eta, \varepsilon/2) \Rightarrow z(1 - s) + t \in B(\eta, \varepsilon).$$

Für alle $x \in B(a, \delta)$ ist dann $\frac{f(x)}{g(x)} \in B(\eta, \varepsilon)$. $\square$

7.13 Beispiele

(a) Für alle $p > 0$ gilt $x^p \log(x) \to 0$ für $x \to 0+$. Dazu schreiben wir $f(x) = \log(x)$ und $g(x) = x^{-p}$, so dass

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1/x}{-px^{-p-1}} = \frac{-1}{p} x^p \to 0 \quad (\text{ weil } p > 0).$$

Wegen $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = \infty$ folgt aus der Regel von l'Hospital die Existenz des rechtsseitigen Grenzwerts $\lim\limits_{x\to 0+} x^p \log(x) = 0$.

(b) Manchmal muss man die Regel wiederholt anwenden: Wir suchen den Grenzwert von $\frac{\cos(x)-1}{x^2}$ für $x \to 0$. Mit $f(x) = \cos(x) - 1$ und $g(x) = x^2$ ist $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\sin(x)}{2x}$, und es gilt $\frac{(-\sin(x))'}{(2x)'} = \frac{-\cos(x)}{2} \to -1/2$. Also existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -1/2$, und daher existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -1/2$. (Wegen $\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ hätte man den Grenzwert auch schneller finden können.)

(c) Die Konvergenz von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ist nicht notwendig für die Konvergenz von $\frac{f(x)}{g(x)}$, wie das Beispiel $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ und $g(x) = x$ zeigt. Hier gilt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0$, aber $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ konvergiert nicht.

(d) Es kann passieren, dass die Regel von l'Hospital zu nichts führt: Wir suchen zum Beispiel $\lim\limits_{x\to 0+} \exp(-1/x)/x^p$ für $p \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\frac{\exp(-1/x)'}{(x^p)'} = \frac{\exp(-1/x)1/x^2}{px^{p-1}} = \frac{\exp(-1/x)}{px^{p+1}}$$

ist die Untersuchung von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ genauso schwer wie die von $\frac{f(x)}{g(x)}$. In solchen Fällen muss man sich etwas anderes einfallen lassen, zum Beispiel

$$\frac{\exp(-1/x)}{x^p} = \exp(-\frac{1}{x} - p\log(x)) = \exp\left(-\frac{1+px\log(x)}{x}\right).$$

Wegen (a) gilt $x\log(x) \to 0$, so dass $(1+px\log(x))/x \to \infty$ für $x \to 0+$.

Wir untersuchen nun Differenzierbarkeit und Ableitungen von Grenzfunktionen. In Analogie zur Stetigkeit und Integrierbarkeit könnte man hoffen, dass gleichmäßige Grenzwerte differenzierbarer Funktionen differenzierbar sind. Allerdings ist dies für Funktionenfolgen $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ zum Beispiel wegen des Satzes von Weierstraß hoffnungslos falsch ($f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ zwar gleichmäßiger Grenzwert von Polynomen, also differenzierbaren Funktionen, aber in 0 nicht differenzierbar.) Wir zeigen jetzt, dass man für die Differenzierbarkeit von Limiten die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen benutzen kann:

7.14 Satz (Differenzierbarkeit von Limiten).
Seien $A \subseteq \mathbb{C}$ konvex und beschränkt und $f_n : A \to \mathbb{C}$ differenzierbar für $n \in \mathbb{N}$ sowie $x_0 \in A$. Außerdem seien folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{C}$ und
(2) f_n' konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $g : A \to \mathbb{C}$.

Dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen eine in A differenzierbare Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ mit $f' = g$, also $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$.

Beweis. Seien $d = \sup\{|x - x_0| : x \in A\} + 1$. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in A$ und $n, m \geq N(\varepsilon)$

$$|f_n'(x) - g(x)| < \varepsilon/3,\ |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon/3d \text{ und } |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$ liefert die Mittelwertungleichung (für $h = f_n - f_m$)

$$(*) \quad |(f_n(x) - f_n(y)) - (f_m(x) - f_m(y))| \leq \frac{\varepsilon}{3d}|x - y| \leq \frac{\varepsilon}{3}|x - y|.$$

Für $y = x_0$ folgt daraus mit der Dreiecksungleichung

$$(**) \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3d}|x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon,$$

so dass $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist, die also einen Grenzwert $f(x)$ hat. Durch Grenzübergang erhalten wir dann die Ungleichungen $(*)$ und $(**)$ für f anstatt f_n für alle $x, y \in A$ und $m \geq N(\varepsilon)$, was die gleichmäßige Konvergenz $f_m \to f$ zeigt. Um die Differenzierbarkeit von f in einem Punkt $\xi \in A$ und $f'(\xi) = g(\xi)$ zu zeigen, fixieren wir $\varepsilon > 0$ und $m = N(\varepsilon)$. Wegen der Differenzierbarkeit von f_m gibt es $\delta > 0$, so dass

$$|f_m(x) - f_m(\xi) - f_m'(\xi)(x - \xi)| \leq \frac{\varepsilon}{3}|x - \xi|$$

für alle $x \in A$ mit $|x-\xi| < \delta$. Für solche x erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&|f(x) - f(\xi) - g(\xi)(x-\xi)| \\
&\le |(f(x) - f_m(x)) - (f(\xi) - f_m(\xi))| + |f_m(x) - f_m(\xi) - f_m'(\xi)(x-\xi)| + |(f_m'(\xi) - g(\xi))(x-\xi)| \\
&\le \frac{\varepsilon}{3}|x-\xi| + \frac{\varepsilon}{3}|x-\xi| + \frac{\varepsilon}{3}|x-\xi| = \varepsilon|x-\xi|. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Als Anwendung zeigen wir nun, dass Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ im Inneren des Konvergenzkreises genauso differenziert werden können wie Polynomfunktionen:

7.15 Satz (Differentiation von Potenzreihen).
Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist f in $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ differenzierbar mit $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Außerdem konvergiert $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ in K und erfüllt dort $F'(z) = f(z)$.

Wegen dieses Satzes kann man jetzt zum Beispiel sehr leicht die Ableitung der Exponentialfunktion berechnen:

$$
\exp'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (z^n/n!)' = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}/(n-1)! = \exp(z).
$$

Beweis. Nach 4.16(c) ist $1/R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, und wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ hat die Reihe $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ebenfalls Konvergenzradius R. Für jedes feste $r < R$ konvergiert $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$ gleichmäßig auf $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ gegen $g(z)$ (dies hatten wir in der Anwendung von Satz 5.24 gesehen). Wegen Satz 7.12 für $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ folgt die Differenzierbarkeit von f in A mit $f' = g$. Die zweite Aussage folgt aus der ersten für F. $\square$

7.16 Beispiele

(a) Die Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$ hat Konvergenzradius 1 und erfüllt im Konvergenzkreis $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

$$
f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \frac{1}{1+z^2}.
$$

Für $y \in \mathbb{R}$ ist andererseits $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$, also $\arctan'(y) = f'(y)$ für $y \in \,]-1,1[$. Wegen des Mittelwertsatzes ist daher $\arctan - f$ auf $]-1,1[$ konstant gleich $\arctan(0) - f(0) =$

0. Wir haben also gezeigt:

$$\boxed{\arctan(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1} \text{ für alle } y \in\,]-1,1[.}$$

(b) Mit den gleichen Argumenten stellt man fest, dass $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}$ in K die Ableitung $f'(z) = \frac{1}{1+z}$ hat. Wegen $(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ und $f(0) = \log(1) = 0$ erhält man

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \text{ für } x \in\,]-1,1[.}$$

(c) Beide Reihen in (a) und (b) konvergieren wegen des Leibniz-Kriteriums auch für $z = 1$. Allerdings folgt daraus a priori noch nichts über den Wert der Reihe. Deshalb zeigen wir (als kleinen Exkurs) folgenden Grenzwertsatz:

7.17 Satz (Abelscher Grenzwertsatz).
Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1, so dass die Reihe $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Dann existiert

$$\lim_{[0,1[\ni x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A.$$

Anders ausgedrückt besagt der Satz, dass $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ (mit $f(1) = A$) stetig ist. (Die Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cup \{1\} \to \mathbb{C}$ ist im Allgemeinen übrigens nicht stetig in 1.) Insbesondere erhalten wir aus dem Satz

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \pi/4 \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2)}$$

Beweis. Seien $s_{-1} = 0$ und $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, so dass $s_n - s_{n-1} = a_n$. Für $x \in [0,1[$ gilt daher

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - x \sum_{n=1}^{\infty} s_{n-1} x^{n-1} = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Wegen der Formel für die geometrische Reihe folgt damit

$$f(x) - A = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - A) x^n.$$

Seien nun $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $|s_n - A| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Für $\delta = \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum\limits_{k=0}^{N-1}|s_n - A|\right)^{-1}$ und $x \in [0,1[$ mit $|x-1| < \delta$ erhalten wir

$$\begin{aligned}|f(x) - A| \leq& |1-x|\sum_{n=0}^{N-1}|s_n - A|x^n + |1-x|\sum_{n=N}^{\infty}|s_n - A|x^n \\ \leq& \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}|1-x|x^N\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}x^N < \varepsilon.\end{aligned}$$ □

7.18 Konvexität

(a) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in [a,b]$ und alle $t \in [0,1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Offenbar ist dies äquivalent zu

$$(*) \quad f(y + t(x-y)) - f(y) \leq t(f(x) - f(y))$$

(b) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar, so ist f genau dann konvex, wenn $f' :]a,b[\to \mathbb{R}$ monoton wächst.

Beweis. Seien f konvex und $a < x < y < b$. Division von $(*)$ durch $t(x-y) < 0$ liefert für $t \in]0,1]$

$$\frac{f(y + t(x-y)) - f(y)}{t(x-y)} \geq \frac{f(x) - f(y)}{x-y}.$$

Mit $t \to 0^+$ folgt damit $f'(y) \geq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Genauso erhält man $f'(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, also $f'(x) \leq f'(y)$. Seien andererseits f' monoton wachsend und $a \leq x < z < y \leq b$. Wegen des Mittelwertsatzes gibt es $\xi_1 \in]x,z[$ und $\xi_2 \in]z,y[$ mit

$$\frac{f(z) - f(x)}{z-x} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(z) - f(y)}{z-y}.$$

Für $t \in]0,1[$ und $z = y + t(x-y)$ folgt

$$\frac{f(y + t(x-y)) - f(x)}{(1-t)(y-x)} \leq \frac{f(y + t(x-y)) - f(y)}{t(x-y)}.$$

Multiplikation mit $t(1-t)(y-x) > 0$ liefert

$$tf(y + t(x-y)) - tf(x) \leq (t-1)f(y + t(x-y)) + (1-t)f(y),$$

was $(*)$ aus Teil (a) impliziert. □

(c) Beispiel. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konvex (das hatten wir auch in 5.9 (f) mit größerer Mühe bewiesen).

(d) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex und $\xi \in [a,b]$ mit $f'(\xi) = 0$. Dann ist

$$f(\xi) = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Beweis. Für $x \in [a, b]$ und $t \in]0, 1]$ ist wegen $(*)$ für $y = \xi$

$$\frac{f(\xi + t(x - \xi)) - f(\xi)}{t} \leq f(x) - f(\xi)$$

Der Quotient links konvergiert für $t \to 0+$ gegen $f'(\xi)(x - \xi) = 0$, und damit folgt $0 \leq f(x) - f(\xi)$. □

7.19 Höhere Ableitungen

(a) Ist $f : A \to \mathbb{C}$ auf A differenzierbar, so ist $f' : A \to \mathbb{C}$ wieder eine Funktion. Ist f' in $\xi \in A$ differenzierbar, so nennt man $f''(\xi) = (f')'(\xi)$ die zweite Ableitung. Höhere Ableitungen definieren wir rekursiv durch

$$f^{(n)}(\xi) = \left(f^{(n-1)}\right)'(\xi),$$

falls $f^{(n-1)} : A \to \mathbb{C}$ existiert und in ξ differenzierbar ist (dabei ist $f^{(0)} = f$). Mit $D^n(A)$ bezeichnen wir die Menge der auf A mindestens n-mal differenzierbaren Funktionen $f : A \to \mathbb{C}$.

(b) Es gilt also $f \in D^n(A) \iff f : A \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar auf A mit $f' \in D^{n-1}(A)$. Dabei bezeichnet $D^0(A)$ die Menge aller Funktionen $A \to \mathbb{C}$. Mit

$$C^n(A) = \{f \in D^n(A) : f^{(n)} : A \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$$

bezeichnen wir die Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Als unmittelbare Konsequenz von 7.18 (b) und Satz 7.10 erhalten wir:

(c) Eine reellwertige Funktion $f \in D^2(]a, b[)$ ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$.

(d) Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in $]a, b[$ differenzierbar und $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$. Dann ist ξ ein lokales Minimum von f, das heißt, es gibt $\delta > 0$ mit

$$f(\xi) = \min\{f(x) : x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]\}.$$

Dass f' in ξ differenzierbar ist, wird hier vorausgesetzt (sonst dürfte man $f''(\xi)$ gar nicht hinschreiben). Durch Anwenden auf $-f$ erhält man ein analoges Kriterium für lokale Maxima (nämlich $f'(\xi) = 0$ und $f'(\xi) < 0$).

Beweis. Wegen $f''(\xi) > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $[\xi - \delta, \xi + \delta] \subseteq [a, b[$ und $\frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} > 0$ für alle $|x \in \xi| \leq \delta$. Wegen $f'(\xi) = 0$ ist also $f'(x) < 0$ für $x < \xi$ und $f'(x) > 0$ für $x > \xi$. Nach Satz 7.10 (b) ist also $f|_{[\xi-\delta,\xi]}$ streng monoton fallend, und $f|_{[\xi,\xi+\delta]}$ ist streng monoton wachsend. □

7.20 Satz (Taylor).

Seien $f \in C^n([a, b])$ reellwertig, so dass $f^{(n)}$ in $]a, b[$ differenzierbar ist, $\alpha, \beta \in [a, b]$ und $T(x) = T_{f,\alpha,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x - \alpha)^k$ das n-te Taylorpolynom von f im Punkt α.

Dann gibt es ξ zwischen α und β mit

$$f(\beta) - T(\beta) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(\beta - \alpha)^{n+1}.$$

Bemerkung.

(a) Für $n = 0$ ist dies der Mittelwertsatz.

(b) Für $\beta = \alpha + h$ erhält man für ein $\xi \in\,]a, a+h[$

$$\frac{f(\alpha+h) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} h^k}{h^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Ist $f^{(n+1)}$ stetig in α, so konvergiert dieser Ausdruck gegen $f^{(n+1)}(\alpha)/(n+1)!$, insbesondere ist also der Zähler links „klein von der Ordnung h^{n+1}“.

(c) Für komplexwertige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ hat man wie bei der Mittelwertungleichung lediglich

$$|f(\beta) - T(\beta)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| |\beta - \alpha|^{n+1} .$$

Zum Beweis wendet man den Satz auf die reellwertige Funktion $\Re(\bar{z} f(x))$ mit $z = f(\beta) - T(\beta)$ an.

Beweis. Wir können $\alpha < \beta$ annehmen und definieren $M = \frac{f(\beta)-T(\beta)}{(\beta-\alpha)^{n+1}}$ sowie $g(x) = f(x) - T(x) - M(x-\alpha)^{n+1}$. Für alle $\ell \in \{0, \dots, n+1\}$ gilt dann

$$g^{(\ell)}(x) = f^{(\ell)}(x) - \sum_{k=\ell}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} k(k-1)\cdots(k-\ell+1)(x-\alpha)^{k-\ell} - M(n+1)\cdots(n+2-\ell)(x-\alpha)^{n+1-\ell},$$

was $g^{(\ell)}(\alpha) = f^{(\ell)}(\alpha) - f^{(\ell)}(\alpha) = 0$ für $\ell \in \{0, \dots, n\}$ impliziert.

Nach Definition von M gilt außerdem $g(\beta) = 0$. Wegen des Mittelwertsatzes gibt es also $\xi_1 \in\,]\alpha, \beta[$ mit $0 = \frac{g(\beta)-g(\alpha)}{b-a} = g'(\xi_1)$. Der Mittelwertsatz für $g'|_{[\alpha,\xi_1]}$ liefert ein $\xi_2 \in\,]\alpha, \xi_2[$ mit $0 = \frac{g'(\xi_1)-g'(\alpha)}{\xi_1 - a} = g''(\xi_2)$. So fortfahrend findet man für alle $\ell \in \{0, \dots, n\}$ ein $\xi_{\ell+1} \in\,]\alpha, \xi_\ell[$ mit

$$0 = \frac{g^{(\ell)}(\xi_\ell) - g^{(\ell)}(\alpha)}{\xi_\ell - \alpha} = g^{(\ell+1)}(\xi_{\ell+1}).$$

Für $\ell = n$ und $\xi = \xi_{n+1}$ ist also

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!M,$$

was die Behauptung impliziert. □

7.21 Taylor-Reihen

(a) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, so gilt für jeden Punkt $\alpha \in [a, b]$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x-\alpha)^n + R$$

mit einem „Rest“ $R = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-\alpha)^{m+1}$. Deshalb kann man hoffen, dass die *Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt α*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x-\alpha)^n$$

für $|x - \alpha|$ klein genug konvergiert mit Wert $f(x)$. Um dies in konkreten Situationen zu verifizieren, muss man also zeigen, dass die Folge der Reste gegen Null konvergiert, was sehr unangenehm sein kann.

(b) Im Allgemeinen wird f nicht durch die Taylorreihe dargestell:
- Es gibt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, so dass die Taylorreihe (in $\alpha = 0$) für alle $x \in \mathbb{R} \setminus 0$ divergiert.
- Es gibt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, so dass die Taylorreihe (in $\alpha = 0$) überall konvergiert aber $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \neq f(x)$ für alle $x \neq 0$.

Beispiele für die erste Situation sind nicht so leicht anzugeben, und wir verzichten darauf. Ein Beispile für die zweite Situation ist $f(x) = \exp(-1/x^2)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Wir überlassen den Nachweis von $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ als Übungsaufgabe.

(c) Wir werden im folgenden Kapitel zeigen, dass die Situation für Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ sehr viel besser ist: Ist eine Funktion in einem Kreis stetig differenzierbar, so ist sie dort auch unendlich oft differenzierbar und wird durch ihre Taylorreihe dargestellt!

KAPITEL 8

Differentiation und Integration

Wir werden nun zeigen, dass Differentiation und Integration zueinander „inverse Operationen" sind. Für eine Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ nennen wir dazu $F : A \to \mathbb{C}$ eine *Stammfunktion* von f (auf A), falls F auf A differenzierbar ist mit $F' = f$.

8.1 Satz.
Seien $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $a \leq \alpha < \beta \leq b$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Beweis. Durch Zerlegen von f in Real- und Imaginärteil können wir f und F als reellwertig annehmen. Für jede Partition $\mathscr{P} = \{\alpha \in x_0 < \cdots < x_n = \beta\}$ liefert der Mittelwertsatz Punkte $\xi_k = \xi(k, \mathscr{P}) \in]x_{k-1}, x_k[$ mit $F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Also gilt

$$F(\beta) - F(\alpha) = \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = R(f, \mathscr{P}, \xi(\mathscr{P}))$$

mit $\xi(\mathscr{P}) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \sqsubseteq \mathscr{P}$. Für eine Folge von Partitionen $\mathscr{P}_m$ mit Feinheiten $|\mathscr{P}_m| \to 0$ erhalten wir

$$F(\beta) - F(\alpha) = \lim_{m\to\infty} R(f, \mathscr{P}_m, \xi(\mathscr{P}_m)) \to \int_\alpha^\beta f(x)dx. \qquad \square$$

8.2 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).
Seien $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und $G(x) = \int_a^x f(t)dt$. Dann ist G eine Stammfunktion von f. Für jede Stammfunktion F von f gilt $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$ für alle $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$.

Beweis. Für reelles f haben wir $G' = f$ in 6.9 (b) gezeigt, und der allgemeine Fall folgt durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil. Hier ein alternativer Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein

$\delta > 0$ mit $|h| < \delta$ und $x + h \in [a, b] \Rightarrow |f(x + h) - f(x)| < \varepsilon$. Für solche h mit $h > 0$ ist dann

$$\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(t) - f(x)dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \leq \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} \varepsilon dt = \varepsilon.$$

Genauso zeigt man diese Ungleichung für $h < 0$. □

8.3 Bemerkung und Beispiele.

(a) Für $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in [a, b]$ schreibt man

$$F\Big|_\alpha^\beta = F(x)\Big|_{x=\alpha}^\beta = F(\beta) - F(\alpha).$$

Dann gilt also für $F' = f$ und $\alpha \leq \beta$, dass $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx = F\Big|_\alpha^\beta$. Falls $\beta < \alpha$, ist das Integral gar nicht erklärt, und damit die Formel richtig bleibt, setzen wir für $f \in RI(\beta, \alpha)$

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t)dt = -\int\limits_\beta^\alpha f(t)dt.$$

(b) Durch Raten von Stammfunktionen kann man jetzt viele Integrale berechnen, zum Beispiel

$$\int\limits_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_{x=a}^b \quad \text{oder} \quad \int\limits_a^b \sin(x)dx = \cos\Big|_a^b.$$

(c) Wir geben gleich eine Tabelle von Grundintegralen an. Mit Hilfe der Integrationstechniken des folgenden Satzes versucht man dann gegebene Integrale darauf zurückzuführen.

8.4 Satz (Integrationstechniken).

(a) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktionen F bzw. G. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in [a, b]$

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)G(x)dx = FG\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta F(x)g(x)dx \quad \text{(Partielle Integration)}.$$

(b) Seien $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad \text{(Substitutionsregel)}.$$

Beweis. (a) folgt aus $(FG)' = fG + Fg$. Die Aussage (b) erhält man aus

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = F\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F \circ \varphi\Big|_{\alpha}^{\beta} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad \square$$

8.5 Beispiele

(a) $\int\limits_a^b x\sin(x)dx = -x\cos(x)\Big|_{x=a}^{b} + \int\limits_a^b \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x)\Big|_{x=a}^{b}$.

Wir haben hier tatsächlich eine Stammfunktion $F(x) = -x\cos(x) + \sin(x)$ von $f(x) = x\sin(x)$ ausgerechnet. Um so eine Rechnung auf Fehler zu überprüfen, sollte man $F' = f$ verifizieren (dies ist aus logischer Perspektive natürlich überflüssig).

(b) Genauso kann man Integrale $\int\limits_a^b x^n\cos(x)dx$ oder $\int\limits_a^b x^n e^{cx}dx$ mit $c \in \mathbb{C}$ durch mehrfache partielle Integration berechnen (für $c = i$ ist das erste Integral der Realteil des zweiten). Dies führt in jeden Schritt zur Reduzierung der Potenz um Eins. Für große $n \in \mathbb{N}$ kann es einfacher sein, eine Rekursionsformel für $I_n = \int\limits_a^b x^n e^{cx}dx$ herzuleiten:

$$I_n = x^n\frac{e^{cx}}{c}\Big|_{x=a}^{b} - \frac{n}{c}\int\limits_a^b x^{n-1}e^{cx}dx = \frac{b^n e^{cb} - a^n e^{ca} - nI_{n-1}}{c}$$

(c) Wir berechnen nun eine Stammfunktion des Logarithmus:

$$\int\limits_a^b \log(x)dx = x\log(x)\Big|_{x=a}^{b} - \int\limits_a^b x\frac{1}{x}dx = (x\log(x) - x)\Big|_{x=a}^{b}.$$

Die Verifikation, dass $F(x) = x\log(x) - x$ eine Stammfunktion des Logarithmus ist, ist banal.

(d) Die Substitutionsregel beschreibt man oft mit dem „symbolischen Kalkül“

$$x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(x)dt$$

Welche Substitution für ein konkretes Integral nützlich ist, lässt sich im Vorhinein nicht sagen. Um Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen zu benutzen, sind gelegentlich die Substitutionen $x = \sin(t)$ oder $x = \tan(t)$ hilfreich.

(e) Als Beispiel berechnen wir nun die Fläche des Halbkreises $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$, also das Integral

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx$$

Die Substitution $x = \sin(t)$ mit $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ liefert

$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)}\cos(t)dt = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)dt.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\cos^2(t) =& \frac{1}{4}\left(e^{it}+e^{-it}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2it}+2+e^{-2it}\right)\\ =& \frac{1}{2}\cos(2t)+\frac{1}{2} = \left(fract2+\frac{\sin(2t)}{4}\right)'\end{aligned}$$

erhalten wir

$$I = (t/2+\sin(2t)/4)\Big|_{t=-\pi/2}^{\pi/2} = \pi/2, \text{weil } \sin(\pm\pi) = 0.$$

Hier eine andere Möglichkeit zur Berechnung von $I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(t)dt$: Wegen partieller Integration und $\cos(\pm\pi/2) = 0$ ist dieses Integral gleich $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2(t)dt$, also

$$I = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(t)dt + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2(t)dt\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}1dt = \pi/2.$$

(f) Gelegentlich benutzt man die Substitution $x = g^{-1}(t)$, um ein Integral der Form $\int\limits_a^b f(g(x))dx$ zu berechnen. Ist $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so dass g' keine Nulllstelle hat, so ist g' wegen des Zwischenwertsatzes entweder immer > 0 oder immer < 0, so dass g eine Bijektion von $[a,b]$ auf $g([a,b])$ ist. Es gilt also

$$\int\limits_a^b (f\circ g)(x)dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(t)(g^{-1})'(t)dt$$

Mit partieller Integration erhält man dann

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b (f\circ g)(x)dx &= f(t)g^{-1}(t)\Big|_{t=g(a)}^{g(b)} - \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f'(t)g^{-1}(t)dt\\ &= f(g(x))x\Big|_{x=a}^{b} - \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f'(t)g^{-1}(t)dt\end{aligned}$$

(g) Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so dass g' keine Nullstelle hat. Ist G eine Stammfunktion von g, so ist

$$H(y) = yg^{-1}(y) - G(g^{-1}(y))$$

eine Stammfunktion von g^{-1} auf $g([a,b])$.

Beweis. Dies kann man mit der Produkt- und der Kettenregel leicht verifizieren. Um sich die Formel nicht merken zu müssen, ist folgender Beweis mit Hilfe der Substitution

$y = g(t)$ nützlich: Für $\alpha = g(a)$ und $\beta = g(b)$ ist

$$\int_\alpha^\beta g^{-1}(y)dy = \int_a^b g^{-1}(g(t))g'(t)dt = \int_a^b tg'(t)dt$$

$$= tg(t)\Big|_{t=a}^b - \int_a^b g(t)dt = g^{-1}(y)y\Big|_{y=\alpha}^\beta - G(g^{-1}(y))\Big|_{y=\alpha}^\beta.$$

□

(h) Weil in Übungs- und Klausuraufgaben stets Integrale angegeben sind, die sich durch (geschickte) Substitutionen und partielle Integration explizit berechnen lassen, könnte der Eindruck entstehen, dass „elementare" Funktionen auch immer „elementare" Stammfunktionen hätten (was genau „elementar" heißt, ist eine nicht leicht zu beantwortende Frage einer fortgeschrittenen Algebra-Vorlesung). Dies ist aber nicht der Fall! Zum Beispiel haben die Funktionen

$$\sin(x^2) \text{ oder } e^{-x^2/2}$$

keine elementaren Stammfunktionen.

(i) Hier eine kleine Tabelle von elementaren Funktionen f, ihrer Ableitungen f und Stammfunktionen F

f	f'	F	Bemerkung
exp	exp	exp	
log	$1/x$	$x\log(x) - x$	$x > 0$
x^p	px^{p-1}	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$	$x > 0, p \neq -1$
sin	cos	$-\cos$	
cos	$-\sin$	sin	
tan	$1 + \tan^2$	$-\log \circ \lvert\cos\rvert$	$\cos(x) \neq 0$
cotan	$-(1 + \text{cotan}^2)$	$\log \circ \lvert\sin\rvert$	$\sin(x) \neq 0$
arcsin	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$x \in\,]-1, 1[$
arccos	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$		
arctan	$\frac{1}{1+x^2}$		
arccotan	$\frac{-1}{1+x^2}$		
sinh	cosh	cosh	$\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$
cosh	sinh	sinh	$\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$
tanh	$1 - \tanh^2$	$\log(\cosh)$	$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$
cotanh	$1 - \text{cotanh}^2$	$\log \circ \lvert\sinh\rvert$	
arsinh	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$		
arcosh	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$x \notin [-1, 1]$
artanh	$\frac{1}{1-x^2}$		$x \in\,]-1, 1[$
arcotanh	$\frac{1}{1-x^2}$		$x \in\,]1, \infty[$

8.6 Integration rationaler Funktionen

(a) Eine Funktion der Form $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit zwei Polynomen P und Q heißt eine rationale Funktion. Der „maximale Defininitionsbereich“ ist $A = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.

(b) Man kann R mit geeigneten $a_{j,k} \in \mathbb{C}$ in der Form

$$R(x) = S(x) + \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{a_{j,1}}{x - z_j} + \frac{a_{j,2}}{(x - z_j)^2} + \cdots + \frac{a_{j,m(j)}}{(x - z_j)^{m(j)}} \right)$$

schreiben, wobei
- S ein Polynom ist und
- $z_1, \ldots, z_p$ die Nullstellen von Q mit Vielfachheiten $m(1), \ldots, m(p)$ sind, d.h., $Q(x) = (x - z_k)^{m(k)} q(x)$ mit einem Polynom ohne Nullstelle in z_k.

Diese Darstellung heißt *Partialbruchzerlegung* von R und ist eindeutig.

Beweis. Wir benutzen den Fundamentalsatz der Algebra (Satz 5.19 und die anschließende Bemerkung): $Q(x) = c \prod_{k=1}^{s} (x - z_k)^{m(k)}$. Wir nehmen nun an, wir hätten die Aussage für das Polynom $q(x) = c \prod_{k=1}^{s-1} (x - z_k)^{m(k)}$ schon bewiesen. Durch Induktion nach $m(s)$ zeigen wir dann die Aussage für Q. Falls $m(s) = 0$ ist $Q = q$.

Für den Induktionsschritt $m(s) - 1 \to m(s)$ schreiben wir

$$\frac{P(x)}{q(x)} - \frac{P(z_s)}{q(z_s)} = \frac{P(x)q(z_s) - q(x)P(z_s)}{q(x)q(z_s)}.$$

Der Zähler dieses Bruchs ist ein Polynom mit Nullstelle z_s, so dass wir wegen des Fundamentalsatzes der Algebra den Faktor $(x - z_s)$ ausklammern können. Wegen $q(z_s) \neq 0$ erhalten wir also ein Polynom p, so dass

$$\frac{P(x)}{q(x)} - \frac{P(z_s)}{q(z_s)} = \frac{(x - z_s)p(x)}{q(x)}$$

Mit $a_{s,m(s)} = P(z_s)/q(z_s)$ folgt also

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x - z_s)^{m(s)}} \frac{P(x)}{q(x)} = \frac{a_{s,m(s)}}{(x - z_s)^{m(s)}} + \frac{p(x)}{\tilde{Q}(x)}$$

wobei $\tilde{Q}(x) = (x - z_s)^{m(s)-1} q(x)$. Nach Induktionsvoraussetzung hat $p(x)/\tilde{Q}(x)$ die gewünschte Form und damit auch P/Q. $\square$

(c) Für die praktische Berechnung der Koeffizienten $a_{j,k}$ bilde man die Funktionen $R_j(x) = (x - z_j)^{m(j)} R(x)$. Dann sind R_j in der Nähe von z_j beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$a_{j,k} = \frac{R_j^{(m(j)-k)}(z_j)}{(m(j) - k)!} \text{ für } k = 1, \ldots, m(j).$$

Es ist nämlich $R_j(x) = h_j(x) + \sum_{k=1}^{m(j)} a_{j,h}(x - j_j)^{m(j)-k} = h_j(x) + \sum_{\ell=0}^{m(j)-1} a_{j,m(j)-\ell}(x - z_j)^{\ell}$ mit einer in der Nähe von z_j beliebig oft differenzierbaren Funktion $h_j(x) = (x - z_j)^{m(j)} f_j(x)$, so dass $h_j^{(p)}(z_j) = 0$ für $p \in \{0, \ldots, m(j) - 1\}$.

Wir differenzieren nun R_j p-mal und erhalten

$$R_j^{(p)}(x) = h_j^{(p)}(x) + \sum_{\ell=p}^{m(j)-1} a_{j,m(j)-\ell}\,\ell(\ell-1)\dots(\ell-p+1)(x-z_j)^{\ell-p}$$

Für $x = z_j$ folgt damit $R_j^{(p)}(x) = p!a_{j,m(j)-p}$.

(d) Es gilt $R(x)-S(x) = g(x)$ mit $g(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$. Daher ist der Grad n des Polynoms S gleich der Differenz der Grade von P und Q (also $S = 0$, falls diese Differenz < 0 ist). Ist $S(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, so erhält man

$$c_n = \lim_{|x|\to\infty} R(x)/x^n,\; c_{n-1} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{R(x) - c_n x^n}{x^{n-1}}, \dots$$

Kennt man Nullstellen von $R = P/Q$ – also Nullstellen von P –, so erhält man direkt einige Werte von P, was (insbesondere bei kleinem Grad n) die Berechnung der Koeffizienten verkürzen kann.

(e) Wir suchen die Partialbruchzerlegung von

$$R(x) = \frac{x^5}{(x+1)^2(x-1)(x-2)}$$

Hier sind $s = 3$, $z_1 = -1$, $m(1) = 2$, $z_2 = 1$, $m(2) = 1$, $z_3 = 2$ und $m(3) = 1$. Wegen

$$R_1(x) = \frac{x^5}{(x-1)(x-2)} \text{ und } R_1'(x) = \frac{5x^4(x-1)(x-2) - x^5(2x-3)}{((x-1)(x-2))^2}$$

sind $\alpha_{1,2} = R_1(-1) = -1/6$ und

$$\alpha_{1,1} = R_1'(-1) = \frac{5\cdot(-2)\cdot(-3) - (-1)^5\cdot(-5)}{36} = \frac{25}{36}.$$

Weiter sind $R_2(x) = (x-1)R(x)$ und $R_3(x) = (x-2)R(x)$, also

$$\alpha_{2,1} = \frac{1}{2^2\cdot(-1)} = -1/4 \text{ und } \alpha_{3,1} = \frac{2^5}{3^2} = \frac{32}{9}.$$

Der Grad von S ist $n = 5-4 = 1$. Für $S(x) = c_0 + c_1 x$ gilt also $c_1 = \lim_{|x|\to\infty} \frac{R(x)}{x} = 1$ und

$$\begin{aligned} c_0 = \lim_{|x|\to\infty} R(x) - x &= \lim_{|x|\to\infty} \frac{x^5 - x(x+1)^2(x-1)(x-2)}{(x+1)^2(x-1)(x-2)} \\ &= \lim_{|x|\to\infty} \frac{x^5 - (x^5 - x^4 + \cdots)}{(x+1)^2(x-1)(x-2)} = 1. \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung ist also

$$R(x) = 1 + x - \frac{1}{6(x+1)^2} + \frac{25}{36(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{32}{9(x-2)}.$$

(f) Hat man eine Partialbruchzerlegung von R, so findet man eine Stammfunktion einfach, indem man Stammfunktionen zu $\frac{1}{(x-z)^m}$ linear kombiniert.

Für $m \neq 1$ ist eine Stammfunktion $(x-z)^{1-m}/1-m$.

Sind $m = 1$ und $z \in \mathbb{R}$, so ist $\log|x-z|$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{R}\setminus\{z\}$.

Sind schließlich $m = 1$ und $z = a + ib$ mit $b \neq 0$, so ist

$$\log|x - z| + \frac{i}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

auf $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{x-z} = \frac{x-a}{(x-a)^2 + b^2} + i\frac{b}{(x-a)^2 + b^2}.$$

8.7 Uneigentliche Integrale

(a) Seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $f :]a, b[\to \mathbb{C}$, so dass $f|_{[\alpha,\beta]}$ für alle $a < \alpha < \beta < b$ integrierbar ist. f heißt (uneigentlich) integrierbar an a beziehungsweise b, falls für ein (oder jedes) $c \in]a, b[$ folgender Grenzwert existiert:

$$\int\limits_{a+}^{c} f(x)dx = \lim_{\alpha\to a+}\int\limits_{\alpha}^{c} f(x)dx \text{ beziehungsweise } \int\limits_{c}^{b-} f(x)dx = \lim_{\beta\to b-}\int\limits_{c}^{\beta} f(x)dx.$$

Wenn keine Verwechslung mit dem eigentlichen Riemann-Integral aus Kapitel 6 zu befürchten ist und inbesondere für $a = -\infty$ und $b = \infty$ verzichtet man auf die Schreibweisen $a+$ und $b-$.

(b) Sind f stetig auf $]a, b[$ und F eine Stammfunktion, so bedeutet dies gerade, dass $\lim\limits_{x\to a+} F(x)$ beziehungsweise $\lim\limits_{x\to b-} F(x)$ existieren. Die Existenz dieser Grenzwerte (in $\mathbb{C}$) ist äquivalent zur Cauchy-Bedingung aus 5.26(e):

(c) f ist genau dann an $a \in \mathbb{R}$ integrierbar, wenn

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta > 0\;\forall\,\alpha, \beta \in]a, a + \delta[\text{ gilt } \left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Für $a = -\infty$ ist die Bedingung durch $\alpha, \beta < -1/\delta$ zu ersetzen. Die analoge Charakterisierung gilt für die Integrierbarkeit an $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(d) Falls $|x^p f(x)| \leq C$ für ein $p > 1$ und $C \geq 0$ und alle $x \geq x_0$ (beziehungsweise $x \leq x_0$), so ist f an ∞ (bzw. $-\infty$) integrierbar. Falls $|x|^q f(x) \geq C$ für ein $q \leq 1$ und $C > 0$ und alle $x \geq x_0$ (bzw. $x \leq x_0$), so ist f nicht an ∞ (bzw. $-\infty$) integrierbar.

Beweis. $g_p(x) = x^{-p}$ hat die Stammfunktion $G_p(x) = \frac{x^{1-p}}{1-p}$, falls $p \neq 1$, beziehungsweise $G_1(x) = \log|x|$. Also ist g_p genau dann an ∞ integrierbar, wenn $p > 1$. Wegen $|f(x)| \leq C|g_p(x)|$ impliziert die Cauchy-Bedingung für g_p mit $p > 1$ die Cauchy-Bedingung für f. Genauso implizieren die Cauchy-Bedingung für f und $g_q(x) \leq \frac{1}{C}f(x)$ die Cauchy-Bedingung für g_q. Falls also f integrierbar an ∞ ist, gilt $q > 1$. □

(e) Beispiele

(1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim\limits_{\alpha\to\infty} \arctan(\alpha) - \arctan(-\alpha) = \pi$.

(2) e^{-x^2} ist an $\pm\infty$ integrierbar, weil $e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$. Die Berechnung $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ ist im Moment noch zu schwierig.

(3) $\frac{\sin(x)}{x}$ ist an ∞ integrierbar. Hierzu benutzen wir partielle Integration und das Cauchy-Kriterium

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{-\cos(x)}{x}\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{\cos(x)}{x^2} dx.$$

Der Betrag des ersten Summanden ist $< \frac{\varepsilon}{2}$ für $\alpha, \beta > 4/\varepsilon$, und der des zweiten ist für α, β genügend groß $< \varepsilon/2$, weil $\cos(x)/x^2$ wegen (d) an ∞ integrierbar ist.

Auch hier ist die Berechnung von $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi/2$ noch zu schwer.

8.8 Satz (Reihenvergleichskriterium).
Sei $f : [n_0, \infty[\to [0, \infty[$ monoton fallend. Dann existiert

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=n_0}^{n} f(k) - \int_{n_0}^{n+1} f(x) dx \right) \in [0, f(n_0)].$$

Insbesondere gilt:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert} \iff f \text{ ist an } \infty \text{ integrierbar.}$$

Beweis. Es gilt

$$A_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) - \int_{n_0}^{n+1} f(x) dx = \sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(k) - f(x) dx.$$

Wegen $f(k) - f(x) \geq 0$ für $x \in [k, k+1]$ ist A_n monoton wachsend und positiv. Andererseits ist $f(x) \leq f(k+1)$ für $x \in [k, k+1]$, so dass $A_n \leq \sum\limits_{k=n_0}^{n} f(k) - f(k+1) = f(n_0) - f(n+1) \leq f(n_0)$. Der Satz über monotone Konvergenz liefert die Konvergenz der Folge A_n. □

Beispiel. Wir können jetzt zum Beispiel ohne das Verdichtungskriterium aus 4.21 (c) sehr leicht die Konvergenz der Zeta-Funktion untersuchen: Für $p > 0$ ist $f(x) = 1/x^p$ monoton fallend und deshalb konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ genau dann, wenn x^{-p} an ∞ integrierbar ist, was genau für $p > 1$ stimmt. Wegen

$$\int_e^\beta \frac{1}{x(\log x)^p} dx = \int_1^{\log\beta} \frac{1}{e^y y^p} e^y dy = \int_1^{\log\beta} y^{-p} dy$$

erhalten wir auch, dass $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ genau dann konvergiert, wenn $p > 1$. Als weiteres Beispiel erhalten wir die Konvergenz von $c_n = \log(n) - \sum\limits_{k=1}^{n} 1/k$. Der Grenzwert heißt *Eulersche Konstante* (es ist nicht bekannt, ob diese Zahl rational ist).

8.9 Satz (Differentiation von Parameterintegralen).
Seien $I = [a, b]$ ein reelles Intervall und $A \subseteq \mathbb{C}$ konvex und entweder offen oder abgeschlossen sowie $f : I \times A \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(1) *Für jedes $z \in A$ ist $f(\cdot, z) : I \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x, z)$ integrierbar.*
(2) *Für jedes $x \in I$ ist $f(x, \cdot) : A \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(x, z)$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x, z)$.*
(3) *$f' : I \times A \to \mathbb{C}$ ist stetig auf $I \times A$ (versehen mit dem euklidischen Abstand in $\mathbb{C}^2$).*

Dann ist die Funktion $F : A \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_a^b f(x, z)dx$ auf A differenzierbar mit

$$F'(z) = \int_a^b f'(x, z)dx.$$

Beweis. Zunächst eine Vorbemerkung: Für stetig differenzierbares $g : A \to \mathbb{C}$ und $z, w \in A$ gilt wegen des Hauptsatzes für $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto g(z + t(z - w))$

$$g(z) - g(w) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt = \int_0^1 g'(z + t(t - w))dt(z - w)$$

Damit folgt

$$\left| \frac{g(z) - g(w)}{z - w} - g'(z) \right| \leq \sup\{|g'(z + t(z - w)) - g'(z)| : t \in [0, 1]\}.$$

Seien nun zuerst A offen, $z \in A$ und $r > 0$, so dass $\bar{B}(z, r) \subseteq A$. Weil $I \times \bar{B}(z, r)$ kompakt ist und f' stetig, ist f' sogar gleichmäßig stetig auf $I \times \bar{B}(z, r)$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also $\delta > 0$, so dass für alle $x \in I$ und $|w - z| < \delta$ die Ungleichung

$$|f'(x, z) - f'(x, w)| < \varepsilon/(b - a)$$

gilt. Für $|w - z| < \delta$ folgt dann mit der Vorbemerkung

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(w)}{z - w} - \int_a^b f'(x, z)dx \right| &\leq \left| \int_a^b \frac{f(x, z) - f(x, w)}{z - w} - f'(x, z)dx \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{f(x, z) - f(x, w)}{z - w} - f'(x, z) \right| dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Für abgeschlossenes A argumentiert man genauso mit der kompakten Menge $A \cap \bar{B}(z, 1)$ anstatt $\bar{B}(z, r)$. $\square$

8.10 Anwendung $I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ und $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Beweis. Seien $\varphi(z) = \int\limits_0^z e^{-x^2} dx$ und $g(z) = \int\limits_0^1 \frac{e^{-z^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$. Wegen 8.9 ist

$$g'(z) = \int\limits_0^1 (-2z) e^{-z^2(1+t^2)} dt = -2z e^{-z^2} \int\limits_0^1 e^{-(zt)^2} dt$$

$$\underset{t=x/z}{=} -2e^{-z^2} \int\limits_0^z e^{-x^2} dx = -(\varphi^2(z))'$$

Wegen des Mittelwertsatzes ist also $g + \varphi^2$ konstant $= g(0) + \varphi(0)^2 = g(0) = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan|_0^1 = \pi/4$.

Andererseits gilt $\varphi^2(z) \to I^2$ für $z \to \infty$ und

$$0 \leq g(z) \leq e^{-z^2} \int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \to 0. \text{ Dies impliziert}$$

$$I^2 = \lim_{z \to \infty} g(z) + \varphi^2(z) = g(0) + \varphi^2(0) = \pi/4.$$

Das zweite Integral ist offenbar $= 2I = \sqrt{\pi}$. □

8.11 Kurvenintegrale

(a) Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt *Kurve*. Falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ heißt γ *geschlossen*.

γ heißt *stückweise stetig differenzierbar* (ssd), falls es eine Partition $\mathscr{P} = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ gibt, so dass $\gamma|_{[x_{j-1}, x_j]}$ für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ stetig differenzierbar ist. Dann definiert man $\gamma'(t) = 0$ für $t \in \{x_0, \ldots, x_n\}$. Wegen $\int\limits_a^b \gamma'(t) dt = \sum\limits_{j=1}^n \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \gamma'(t) dt$ kann man den Hauptsatz für ssd Kurven auf die Teilintervalle anwenden und erhält $\int\limits_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a)$.

(b) Für eine Funktion $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$, so dass $f \circ \gamma$ auf $[a, b]$ integrierbar ist, definieren wir das *Kurvenintegral* von f bezüglich γ durch

$$\int\limits_\gamma f(\zeta) d\zeta = \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

(c) Alle Sätze für das Riemann-Integral haben dann Analoga für das Kurvenintegral.

(d) Beispiel: Für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int\limits_\gamma \zeta^n d\zeta = \begin{cases} 2\pi i & , \quad n = -1 \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat ist $\int\limits_\gamma \zeta^n d\zeta = \int\limits_0^{2\pi} (e^{it})^n i e^{it} dt = i \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = 2\pi i$, falls $n = -1$, und $= \frac{e^{i(n+1)t}}{(n+1)}\Big|_{t=0}^{2\pi} = 0$ für $n \neq -1$.

8.12 Theorem (Cauchy).
Seien $A \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : A \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, $z_0 \in A$ und $R > 0$, so dass $\bar{B}(z_0, R) \subseteq A$, sowie $\gamma : [0, 2\pi] \to A$, $t \mapsto z_0 + Re^{it}$.

(a) Für alle $z \in B(z_0, R)$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{(Cauchysche Integralformel).}$$

(b) f ist beliebig oft differenzierbar in A und für $z \in B(z_0, R)$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Bemerkung. Im Vergleich zur Situation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (es gibt $f \in C^1(\mathbb{R}) \backslash C^2(\mathbb{R})$, Taylor-Reihen können divergieren oder sogar gegen „falsche“ Grenzwerte konvergieren) ist dieser Satz sensationell. Weil Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ so unterschiedlich sind, nennt man stetig differenzierbare Funktionen $A \to \mathbb{C}$ (mit $A \subseteq \mathbb{C}$ offen) meistens *holomorph.*

Beweis. Durch Betrachten von $\tilde{f}(z) = f((z - z_0)/R)$ sieht man, dass es reicht, den Fall $z_0 = 0$ und $R = 1$ zu beweisen.

(a) Für $r \in [0, 1]$ definieren wir die stetig differenzierbaren Kurven $\gamma_r(t) = r\gamma(t) + (1 - r)z = z + r(\gamma(t) - z)$ und

$$F(r) = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma_r(t))}{\gamma_r(t) - z} \gamma_r'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r(\gamma(t) - z))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt$$

Der Satz über Parameterintegrale liefert die Differenzierbarkeit von F auf $]0, 1]$ und

$$\begin{aligned} F'(r) &= \int_0^{2\pi} f'(z + r(\gamma(t) - z))\gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (f \circ \gamma_r)'(t) \frac{1}{r} dt \\ &= \frac{1}{r}(f \circ \gamma_r)\Big|_0^{2\pi} = 0, \text{ weil } \gamma_r(2\pi) = \gamma_r(0). \end{aligned}$$

Wegen der Mittelwertungleichung ist also F auf $]0, 1]$ konstant. Also gilt

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = F(1) = \lim_{r \to 0} F(r) = \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt = f(z) \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

(für die dritte Gleichheit haben wir die *gleichmäßige* Konvergenz $f(z + r(\gamma(t) - z)) \to f(z)$ $(r \to 0)$ benutzt, die die Konvergenz der Integrale impliziert). Bisher haben wir nur ausgenutzt, dass γ eine geschlossene ssd Kurve ist mit $z \notin \gamma([0, 2\pi])$. Wir müssen jetzt nur noch den sogenannten *Index* $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$ ausrechnen:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}_\gamma(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{1-e^{-it}z}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-int}z^n dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int\limits_0^{2\pi} e^{-int}dt = 1,\end{aligned}$$

weil $\int\limits_0^{2\pi} e^{-int}dt = \frac{e^{-int}}{-in}\Big|_{t=0}^{2\pi} = 0$ für alle $n \neq 0$.

(b) Für $\zeta = \gamma(t)$ gilt $|z/\zeta| = |z| < 1$, und wir erhalten

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\frac{1}{1 - z/\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\zeta^{n+1}$$

mit gleichmäßiger Konvergenz der Reihe bezüglich $\zeta \in \gamma([0, 2\pi])$. Wegen (a) folgt damit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(\zeta)/\zeta^{n+1}d\zeta$. Als in $B(0,1)$ konvergente Potenzreihe ist f in $B(0,1)$ beliebig oft differenzierbar mit

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-p+1)z^{n-p}, \text{ also } f^{(p)}(0) = a_p p! \qquad \square$$

Die Cauchysche Integralformel (insbesondere für sehr viel allgemeinere Kurven als in unserer Version – das Problem ist dann die Berechnung des Index) findet in fast allen Teildisziplinen der Mathematik Anwendungen und wird sehr viel eingehender in Vorlesungen über Funktionentheorie untersucht.

Hier nur eine kleine Anwendung der Tatsache, dass f automatisch durch die Taylor-Reihe dargestellt wird:

8.13 Die Binomialreihe

(a) Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $\binom{\alpha}{0} = 1$ und $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$. Folgende Aussage verallgemeinert den Binomialsatz 3.5:

(b) Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und $x \in]-1, 1[$ gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

Beweis. Die Potenz $(1+x)^\alpha = \exp(\alpha \log(1+x))$ ist zunächst nur für reelle $x > -1$ definiert. Gemäß 7.16(b) ist aber

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

für alle $x \in]-1,1[$, und deshalb definieren wir

$$L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}$$

für $z \in B(0,1)$. Weil die Logarithmusreihe für $x \in]-1,1[$ konvergiert, hat sie Konvergenzradius ≥ 1, so dass $L : B(0,1) \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar ist und $f(z) = \exp(\alpha L(z))$ in $B(0,1)$ durch die Taylor-Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ dargestellt wird. Wegen $f(x) = (1+x)^\alpha$ für $x \in]-1,1[$ sind die n-ten Ableitungen $f^{(n)}(0)$ gleich denen von $\varphi(x) = (1+x)^\alpha$, also $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$. □

(c) Dass die Reihe in (b) die Taylor-Reihe von $(1+x)^\alpha$ ist, war sehr leicht auszurechnen. Dass aber in (b) tatsächlich Gleichheit gilt, ist mit rein „reeller Theorie" sehr mühsam zu beweisen.

8.14 Satz (Stirlingsche Formel).

$$\frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{2\pi n}} \to 1 \textit{ für } n \to \infty.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $x_n = n! e^n / (n^n \sqrt{n})$ monoton fällt. Wegen

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)! e^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} \cdot \frac{1}{e}$$

ist diese Monotonie äquivalent zu

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \log(1 + 1/n) \geq 1,$$

so dass es reicht, die Ungleichung $f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x/2} \geq 0$ für alle $x \geq 0$ zu beweisen (um dann $x = 1/n$ einzusetzen). Wegen $f(0) = 0$ genügt es, f als monoton wachsend nachzuweisen, was der Fall ist, weil

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(1+x/2) - x/2}{(1+x/2)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+x^2/4} \geq 0.$$

Wegen des Satzes über monotone Konvergenz existiert also $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, und wir müssen noch $c = \sqrt{2\pi}$ zeigen. Dazu zeigen wir zunächst

$$w_n = \frac{4^n (n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} \to \sqrt{\pi} \quad \text{(Wallis-Produkt)}$$

Seien dazu $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx$, also $I_0 = \pi/2$ und $I_1 = 1$. Mit partieller Integration folgt für $n \geq 2$

$$I_n = -\cos\sin^{n-1}\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^{n-2}(x)dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

also $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Induktiv folgt damit

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j} \quad \text{und } I_{2n+1} = \prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1}, \text{ also}$$

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{\pi}\prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j-1} \cdot \frac{2j}{2j+1} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}\right)^2 = \frac{2}{\pi(2n+1)}\left(\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}\right)^2.$$

Andererseits ist wegen $0 \leq \sin(x) \leq 1$ für $x \in [0, \pi/2]$

$$I_{2n} \geq I_{2n+1} \geq I_{2n+2}, \quad \text{so dass} \quad 1 \geq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \geq \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \to 1.$$

Wegen der Stetigkeit der Wurzel und $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1/2}} \to 1$ folgt daher $w_n \to \sqrt{\pi}$. Wegen $n! = (n/e)^n \sqrt{n} x_n$ erhalten wir schließlich

$$w_n = \frac{4^n ((n/e)^n \sqrt{n} x_n)^2}{\sqrt{n}(2n/e)^{2n}\sqrt{2n} x_{2n}} = \frac{x_n^2}{\sqrt{2} x_{2n}} \to \frac{c}{\sqrt{2}},$$

also $c = \sqrt{2\pi}$. $\square$

KAPITEL 9

Mehrdimensionale Differentialrechnung

9.1 Lineare Abbildungen

(a) Für *Vektoren* x und ξ gibt es keine Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, so dass die Definition der Ableitung aus Kapitel 7 nicht direkt übertragbar ist. Allerdings bleibt die Interpretation der Differenzierbarkeit als „sehr gute affin-lineare Approximation“ sinnvoll in allen Kontexten, in denen man

- von linearen Abbildungen sprechen und
- Abstände messen kann.

(b) Wir interessieren uns in diesem Kapitel vornehmlich für die endlich-dimensionalen Vektorräume $X = \mathbb{R}^n$ oder $X = \mathbb{C}^n$ und $Y = \mathbb{C}^m$ versehen jeweils mit den euklidischen Normen

$$\|x\|_X = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \text{ und } \|y\|_Y = \left(\sum_{y=1}^{m} |y_j|^2\right)^{1/2}.$$

Allerdings sind viele Aussagen in allgemeinen normierten Räumen nicht bloß auch richtig sondern sogar einfacher, weil weniger spezielle Strukturen benötigt werden.

(c) Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt *linear*, falls für alle $x, y \in X$ und alle Zahlen α, β (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, je nachdem ob X und Y reelle oder komplexe Vektorräume sind)

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

gilt (zur Verdeutlichung sagt man auch $\mathbb{R}$-linear beziehungsweise $\mathbb{C}$-linear).

Ist $T : X \to Y$ linear und in $\xi = 0$ stetig, so gibt es ein $C \geq 0$ mit

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \text{ für alle } x \in X.$$

Zu $\varepsilon = 1$ gibt es nämlich ein $\delta > 0$ mit $\|T(z)\| \leq 1$ für alle $\|z\| \leq \delta$, und die Linearität liefert für $x \neq 0$ und $z = \frac{\delta}{\|x\|}x$, dass $\|T(x)\|_Y = \frac{\|x\|}{\delta}\|T(z)\|_Y \leq \frac{1}{\delta}\|x\|$.

Das minimale C in obiger Ungleichung ist

$$|||T||| = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}.$$

Ist ein lineares T in 0 stetig, so folgt aus der Ungleichung die Stetigkeit in jedem Punkt ξ, weil

$$\|T(x) - T(\xi)\|_Y \leq C\|x - \xi\|_X.$$

Mit $L(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge der stetigen und linearen Abbildung von X nach Y. Diesen Vektorraum versehen wir stets mit der Norm $|||T|||$.

(d) Für $X = \mathbb{R}^n$ oder $X = \mathbb{C}^n$ ist jede lineare Abbildung $T : X \to Y$ stetig: Für die Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_n$ gelten nämlich

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \text{ mit } \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k \text{ und } |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_X \, \|y\|_X$$

(Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Dies impliziert wegen der Linearität

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle T(e_k) \text{ und } \|T(x)\|_Y \leq \sum_{k=1}^{n} \|x\|_X \|T(e_k)\|_Y = C\|x\|_X$$

mit $C = \sum\limits_{k=1}^{n} \|T(e_k)\|_Y$.

(e) Wegen der vorletzten Formel ist also T durch die Werte $a_k = T(e_k)$ eindeutig bestimmt. Ist speziell $Y = \mathbb{R}^m$ oder $Y = \mathbb{C}^m$ und schreibt man diese Vektoren als *Spalten* in eine Matrix

$$A = [a_1, \dots, a_n],$$

so wird T durch das Matrixprodukt $T(x) = A \cdot x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$ dargestellt.

9.2 Differenzierbarkeit

(a) Im Folgenden seien stets X und Y Vektorräume (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$, $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$ eine Abbildung. Man verliert nicht viel, wenn man immer an $X = \mathbb{R}^n$ oder $X = \mathbb{C}^n$ denkt, aber wir schreiben dies nur dann explizit, wenn tatsächlich die spezielle Situation benötigt wird.

(b) Die Abbildung $f : A \to Y$ heißt *(total) differenzierbar* in $\xi \in A$, wenn es eine stetige lineare Abbildung $f'(\xi) \in L(X, Y)$ gibt, so dass

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A \text{ gilt } \big(\|x - \xi\|_X \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(\xi) - f'(\xi)(x - \xi)\|_Y \leq \varepsilon \|x - \xi\|_X\big),$$

das heißt also, dass f in der Nähe von ξ sehr gut durch die affin-lineare Funktion $t(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$ approximiert wird. Jede stetige lineare Abbildung $f'(\xi)$ mit dieser Eigenschaft heißt *Ableitung* von f in ξ. In der älteren Literatur werden auch die Begriffe „totale Ableitung“ oder „totales Differential“ benutzt und die Symbole $Df(\xi), df(\xi), \dots$

(c) Der Graph von t ist eine „Tangentialebene“ an den Graphen von f. Die Graphen berühren sich in $(\xi, f(\xi))$.

(d) f ist genau dann in ξ differenzierbar mit Ableitung $f'(\xi)$, wenn es eine in ξ stetige Funktion $r : A \to Y$ gibt mit

$$f(x) - f(\xi) - f'(\xi)(x - \xi) = \|x - \xi\|_X r(x) \text{ und } r(\xi) = 0.$$

Die Hinlänglichkeit folgt aus $\|r(x)\|_Y \leq \varepsilon$ für $\|x - \xi\|_X \leq \delta$ und hinreichend kleines $\delta > 0$, und für die Notwendigkeit definiert man $r(\xi) = 0$ und $r(x)$ als Quotient der linken und rechten Seite für $x \neq \xi$.

(e) Hier einige Beispiele:
  (1) Ist $f : X \to Y$ konstant, so gilt $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in X$.
  (2) Ist $f \in L(X, Y)$, so ist $f'(\xi) = f$ für alle $\xi \in X$, weil $f(x) - f(\xi) - f(x - \xi) = 0$.

(3) Die Funkrion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ ist in jedem Punkt differenzierbar mit

$$f'(\xi)(u) = 2\langle u, \xi\rangle.$$

Mit $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$ wie in 9.1 ist nämlich

$$\begin{aligned}|f(x) - f(\xi) - f'(\xi)(x-\xi)| &= |\langle x, x\rangle - \langle \xi, \xi\rangle - 2\langle x-\xi, \xi\rangle| \\ &= |\langle x, x\rangle - 2\langle x, \xi\rangle + \langle \xi, \xi\rangle| = \|x-\xi\|^2 \le \varepsilon\|x-\xi\|\end{aligned}$$

für alle $\|x-\xi\| \le \delta = \varepsilon$.

(f) Für $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$ ist jede lineare Abbildung $T \in L(X, Y)$ durch den Vektor $T(1) \in Y$ in sehr einfacher Weise bestimmt, nämlich

$$T(x) = xT(1).$$

In diesem Fall stimmt die Differenzierbarkeit von $f : \mathbb{C} \to Y$ in ξ mit der Existenz des Grenzwertes

$$Df(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

überein (wobei wir den Quotienten als $\frac{1}{x-\xi}(f(x) - f(\xi))$ interpretieren). In diesem Fall ist also $f'(\xi)(u) = uDf(\xi)$ mit $Df(\xi) = f'(\xi)(1)$.

(g) Die Ableitung $f'(\xi)$ ist nur dann eindeutig bestimmt, wenn die Menge A groß genug ist, nämlich zum Beispiel, wenn $B(\xi, r) \subseteq A$ für ein $r > 0$.

Ist nämlich $T \in L(X, Y)$ eine weitere Abbildung wie in der Definition, so folgt für alle $z = x - \xi$ mit $\|z\|_X < \min\{\delta, r\}$

$$\|f'(\xi)(z) - T(z)\|_Y \le \varepsilon\|z\|_X$$

und wegen der Linearität von $f'(\xi)$ und T gilt dies dann auch für alle $z \in X$, was $|||f'(\xi) - T||| = 0$ und damit $f'(\xi) = T$ liefert. In dem für uns nicht besonders wichtigen Fall, dass A zu klein ist, muss man Formeln für $f'(\xi)$ so interpretieren, dass diese Formel tatsächlich *eine* Ableitung ist.

9.3 Satz (Rechenregeln).
Seien $f, g : A \to Y$ beide in ξ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(a) f ist stetig in ξ.

(b) $f + g$ ist differenzierbar in ξ mit $(\alpha f + \beta g)'(\xi) = \alpha f'(\xi) + \beta g'(\xi)$.

(c) Ist $h : f(A) \to Z$ differenzierbar in $\eta = f(\xi)$, so ist $h \circ f : A \to Z$ differenzierbar mit

$$(h \circ f)'(\xi) = h'(f(\xi)) \circ f'(\xi) \quad (\text{KETTENREGEL}).$$

(d) Falls $Y = \mathbb{C}^m$ und $f = f_1 \times \cdots \times f_m$ (das heißt, $f_j(x)$ ist die j-te Komponente von $f(x)$ für jedes $x \in A$), so ist f genau dann in ξ differenzierbar, wenn alle $f_j : X \to \mathbb{C}$ in ξ differenzierbar sind, und dann ist $f'(\xi) = f_1'(\xi) \times \cdots \times f_m'(\xi)$.

BEWEIS.

(a) Sei $r : A \to Y$ die in ξ stetige Funktion aus 9.2 (d). Dann ist $f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \|x-\xi\|_X r(x)$ stetig in ξ.

(b) Sind r und s wie im Kriterium (d) für f und g, so erfüllt $x \mapsto \alpha r(x) + \beta s(x)$ das Kriterium für $\alpha f + \beta g$.

(c) Seien $r : A \to Y$ und $s : f(A) \to Z$ die in ξ beziehungsweise $\eta = f(\xi)$ stetigen Funktionen mit $f(\xi) = 0$, $s(\eta) = 0$ und

$$f(x) - f(\xi) - f'(\xi)(x-\xi) = \|x-\xi\|_X \, r(x),$$
$$h(y) - h(\eta) - h'(\eta)(y-\eta) = \|y-\eta\|_Y \, s(y).$$

Für $y = f(x)$ gilt dann wegen $y - \eta = f'(\xi)(x-\xi) + \|x-\xi\|_X r(x)$

$$\begin{aligned} h(f(x)) - h(f(\xi)) - h'(\eta) \circ f'(\xi)(x-\xi) &= \|f(x) - f(\xi)\|_Y \, s(f(x)) + h'(\eta)(\|x-\xi\|_X \, r(x)) \\ &= \|x-\xi\|_X \, t(x) \end{aligned}$$

mit der durch $t(\xi) = 0$ und $t(x) = \frac{\|f(x)-f(\xi)\|_Y}{\|x-\xi\|_X} s(f(x)) + h'(\eta)(r(x))$ definierten Abbildung $t : A \to Z$. Um t als in ξ stetig nachzuweisen, reicht es wegen $s(f(\xi)) = 0$ zu zeigen, dass der Vorfaktor von $s(f(x))$ in der Nähe von ξ beschränkt ist, also $\|f(x) - f(\xi)\|_Y \leq C\|x-\xi\|$ für hinreichend kleine $\|x-\xi\|_X$ mit einer Konstanten $C \geq 0$. Dies ist der Fall, weil

$$\|f(x) - f(\xi)\|_Y = \|f'(\xi)(x-\xi) + \|x-\xi\|_X r(x)\|_Y \leq (|||f'(\xi)||| + \|r(x)\|_Y)\|x-\xi\|_X.$$

(d) Es gilt $f_j = \pi_j \circ f$ mit der stetigen und linearen Projektion $\pi_j : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z_j$. Ist also f in ξ differenzierbar, so auch $\pi_j \circ f$ mit $(\pi_j \circ f)'(\xi) = \pi_j'(f(\xi)) \circ f'(\xi) = \pi_j \circ f'(\xi)$.

Sind andererseits alle f_j in ξ differenzierbar, so ist $f'(\xi) = f_1'(\xi) \times \cdots \times f_m'(\xi)$ stetig und linear und liefert wegen $\|z\|_{\mathbb{C}^m} \leq \sqrt{m} \max\{|z_j| : 1 \leq j \leq m\}$ die gesuchte affin-lineare Approximation an f. □

9.4 Richtungsableitungen

(a) Seien $f : A \to Y$, $\xi \in A$ und $v \in X$ ein Vektor, so dass es eine Folge $0 \neq t_k \to 0$ gibt mit $t_k \in A_{\xi,v} = \{t \in \mathbb{C} : \xi + tv \in A\}$, falls X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, und $A_{\xi,v} = \{t \in \mathbb{R} : \xi + tv \in A\}$, falls X ein reeller Vektorraum ist. Dann heißt V eine in ξ *zulässige Richtung.* f heißt im Punkt ξ *differenzierbar in Richtung* v, falls folgender Grenzwert in Y existiert:

$$D_v f(\xi) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\xi + tv) - f(\xi)}{t}.$$

$D_v f(\xi)$ heißt dann *Richtungsableitung von* f *in* ξ *in Richtung* v. Um Verwechslungen auszuschließen, nennt man die Differenzierbarkeit aus 9.2 oft *totale* Differenzierbarkeit.

(b) Sei $\varphi = \varphi_{\xi,v}$ die affin-lineare Funktion $\varphi(t) = \xi + tv$ mit $D\varphi(0) = v$ (also $\varphi'(0)(u) = uv$). Dann bedeutet die Richtungsdifferenzierbarkeit also die Differenzierbarkeit von

$$f \circ \varphi_{\xi,v} : A_{\xi,v} \to Y \text{ und } D_v f(\xi) = (f \circ \varphi)'(0)(1)$$

Ist f (total) differenzierbar, so liefert die Kettenregel:

(c) Ist f in ξ differenzierbar, so ist f in ξ in jede zulässige Richtung v differenzierbar, und es gilt

$$D_v f(\xi) = f'(\xi)(v).$$

Insbesondere hängt dann also die Richtungsableitung linear von der Richtung ab.

Beweis. Wegen der Kettenregel ist $(f \circ \varphi)'(0) = f'(\varphi(0)) \circ \varphi'(0) = f'(\xi) \circ \varphi'(0)$. Damit folgt

$$D_v f(\xi) = f'(\xi) \circ \varphi'(0)(1) = f'(\xi)(\varphi'(0)(1)) = f'(\xi)(v). \qquad \square$$

(d) Speziell für $Y = \mathbb{C}$ (und wegen 9.2(d) auch für $Y = \mathbb{C}^m$) kann man alle Richtungsableitungen mit den „eindimensionalen Methoden“ aus Kapitel 7 in der Regel leicht ausrechnen. Damit weiß man zwar noch nicht, ob f in ξ total differenzierbar ist, aber man hat einen Kandidaten für $f'(\xi)$ – nämlich die Abbildung $v \mapsto D_v f(\xi)$.

Man kann dann überprüfen, ob dieser Kandidat tatsächlich linear und stetig ist und die gute affin-lineare Approximation liefert.

Falls man schon weiß, dass f in ξ differenzierbar ist, braucht man $D_v f(\xi)$ nur noch für eine Basis von X zu berechnen. Ist nämlich $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von X, so kann man jedes $x \in X$ als $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$ schreiben und erhält

$$f'(\xi)(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f'(\xi)(v_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k D_{v_k} f(\xi).$$

(e) Die Existenz aller Richtungsableitungen impliziert im Allgemeinen nicht die totale Differenzierbarkeit! Seien dazu $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $\xi = 0$ und

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2 + y^4 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases} .$$

Für eine Richtung $v = (a,b) \neq (0,0)$ und $t \neq 0$ ist dann

$$\frac{f(\xi + tv) - f(\xi)}{t} = \frac{1}{t} \frac{(ta)(tb)^2}{(ta)^2 + (tb)^4} = \frac{ab^2}{a^2 + t^2 b^4},$$

und dies konvergiert gegen

$$D_v f(0) = \begin{cases} b^2/a, & a \neq 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases} .$$

Diese Abbildung $v \mapsto D_v f(0)$ ist nicht linear, so dass f in 0 nicht differenzierbar ist. Ein anderes Argument dafür ist, dass f in 0 unstetig ist, weil

$$f(t, \sqrt{t}) = \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \not\to 0.$$

(f) Seien nun speziell $X = \mathbb{R}^n$ oder $X = \mathbb{C}^n$ und $e_1, \ldots, e_n$ die Einheitsvektoren. Ist f im Punkt ξ in Richtung e_k differenzierbar, so heißt

$$D_k f(\xi) = D_{e_k} f(\xi)$$

die k-te *partielle Ableitung* von f in ξ. Dies ist gerade die Ableitung in ξ_k der „partiellen Funktion“

$$x_k \mapsto f(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, x_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n),$$

bei der die „Variablen“ ξ_j mit $j \neq k$ festgehalten (oder „eingefroren“) sind. Andere in der Literatur gebräuchliche Schreibweisen sind

$$\partial_k f(\xi), \partial_{x_k} f(\xi), \frac{d}{dx_k} f(\xi), \frac{\partial}{\partial x_k} f(x), \ldots$$

Der Zeilenvektor mit Komponenten in Y

$$\nabla f(\xi) = (D_1 f(\xi), \ldots, D_n f(\xi))$$

heißt *Gradient* von f in ξ. Im Fall $Y = \mathbb{C}^m$ sind die Elemente $D_j f(\xi)$ *Spalten* der Länge m, und man nennt dann $\nabla f(\xi) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ die *Jacobi-Matrix* von f in ξ. Die *Zeilen* dieser Matrix sind dann die Gradienten der Komponenten $f_j = \pi_j \circ f$ von $f = f_1 \times \cdots \times f_m$.

Falls f in ξ differenzierbar ist, gilt also nach (d)

$$f'(\xi)(u) = \sum_{k=1}^{n} u_k D_k f(\xi) = \nabla f(\xi) \cdot u$$

(wobei man $D_k f(\xi) u_k$ üblicherweise eher als Linksmultiplikation $u_k D_k f(\xi)$ schreibt).

(g) Im Fall $n = 3$ (oder $n = 2$) schreibt man einen Vektor in $\mathbb{C}^3$ meistens mit Koordination (x, y, z) anstatt (x_1, x_2, x_3). Für die partiellen Ableitungen schreibt man dann auch

$$D_1 f(x, y, z) = D_x f(x, y, z), D_2 f(x, y, z) = D_y f(x, y, z) \text{ etc.}$$

Üblicherweise kann man die „im Flug“ ausrechnen und direkt den Gradienten hinschreiben. Zum Beispiel ist für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}(x, y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{1+y^2}$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y\cos(xy)}{1 + y^2}, \frac{x(1 + y^2)\cos(xy) - 2y\sin(xy)}{(1 + y^2)^4}\right).$$

Obwohl diese Rechnungen sehr leicht sind, ist die Verifikation, dass $f'(\xi)(u) = \nabla f(\xi)u$ tatsächlich eine Ableitung ist, anhand der Definition noch immer sehr unangenehm. Deshalb ist folgender Satz von herausragender Bedeutung. Dabei nennen wir $f : A \to Y$ mit $A \subseteq \mathbb{C}^n$ oder $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *partiell differenzierbar* auf A, falls in jedem Punkt $\xi \in A$ alle partiellen Ableitungen existieren.

9.5 Satz.
Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ oder $A \subseteq \mathbb{C}^n$ und $f : A \to \mathbb{C}^m$ partiell differenzierbar. Ist ξ ein innerer Punkt von A, in dem alle partiellen Ableitungen $D_k f : A \to \mathbb{C}^m$ stetig sind, so ist f in ξ total differenzierbar.

Mit diesem Satz sieht man also sofort die Differenzierbarkeit in Beispiel 9.3(g). Wir schreiben

$$f \in C^1(A, \mathbb{C}^m),$$

falls f auf A stetige partielle Ableitungen hat. Nach unserer Definition ist $f' : A \to L(X, Y)$ eine Abbildung mit Werten in dem durch

$$|||T||| = \sup\{\|T(z)\|_Y : \|z\|_X \leq 1\}$$

normierten Raum $L(X, Y)$, so dass eine andere Definition der stetigen Differenzierbarkeit plausibel ist. Zum Glück gilt aber für $A \subseteq \mathbb{C}^n$:

$$f \in C^1(A, \mathbb{C}^m) \iff f' : A \to L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \text{ ist stetig.}$$

In der Tat: Sind alle partiellen Ableitungen $D_j f$ stetig in ξ, so gilt für $\|z\|_{\mathbb{C}^n} \leq 1$

$$\begin{aligned}\|f'(x)(z) - f'(\xi)(z)\|_{\mathbb{C}^m} &= \|\sum_{j=1}^n (D_j f(x) - D_j f(\xi)) z_j\|_{\mathbb{C}^m} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \|D_j f(x) - D_j f(\xi)\|_{\mathbb{C}^m},\end{aligned}$$

was die Stetigkeit von f' in ξ impliziert. Die andere Implikation folgt aus $D_j f(x) - D_j f(\xi) = f'(x)(e_j) - f'(\xi)(e_j)$.

Satz 9.4 stimmt übrigens für beliebige normierte Räume Y anstatt $\mathbb{C}^m$ (was wir aber nicht beweisen).

Beweis. Wegen Satz 9.2(d) reicht der Fall $m = 1$, und wir betrachten zuerst den reellen Fall für $n = 2$ und schreiben $\xi = (a, b)$. Wegen 9.3(f) ist

$$f'(\xi)(u, v) = D_1 f(\xi) u + D_2 f(\xi) v$$

ein Kandidat für die Ableitung. Um die gewünschte Approximation zu zeigen, schreiben wir

$$\begin{aligned}&f(x, y) - f(a, b) - f'(a, b)(x - a, y - b) \\ &= f(x, y) - f(a, y) - D_1 f(a, b)(x - a) + f(a, y) - f(a, b) - D_2 f(a, b)(y - b)\end{aligned}$$

und wenden den Mittelwertsatz auf $x \mapsto f(x, y)$ und $y \mapsto f(a, y)$ an. Dann gibt es also α und β zwischen x und a bzw. y und b mit

$$f(x, y) - f(a, b) - f'(a, b)(x - a, y - b) = (D_1 f(\alpha, y) - D_1 f(a, b))(x - a) + (D_2 f(a, \beta) - D_2 f(a, b))(y - b).$$

Ist (x, y) nah bei (a, b), so sind auch (α, y) und (a, β) nah bei (a, b), so dass wir eine geeignete Abschätzung erhalten.

Für den komplexen Fall wenden wir die Mittelwertungleichung

$$|g(x) - g(a)| \leq |g'(\alpha)|\, |x - a|$$

aus 7.9(f) (mit einer differenzierbaren Funktion g auf einer konvexen Menge, α ist dann eine Konvexkombination von x und a) auf $\tilde{g}(x) = g(x) - g'(a)x$ an und erhalten

$$|g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)| \leq |g'(\alpha) - g'(a)|\, |x - a|.$$

Dann erhalten wir also wie eben

$$|f(x, y) - f(a, b) - f'(a, b)(x - a, y - b)| \leq |D_1 f(\alpha, y) - D_1 f(a, b)||x - a| + |D_2 f(a, \beta) - D_2 f(a, b)||y - b|.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$, so wählen wir $\delta > 0$, so dass $B(\xi, \delta) \subseteq A$ und

$$\|(x, y) - (a, b)\|_X < \delta \;\Rightarrow\; |D_k f(x, y) - D_k f(a, b)| < \varepsilon/\sqrt{2}.$$

Für obige α, β ist dann auch $\|(\alpha, y) - (a, b)\|_X < \delta$ und $\|(a, \beta) - (a, b)\|_X < \delta$, und wir erhalten

$$|f(x, y) - f(a, b) - f'(a, b)(x - a, y - b)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(|x - a| + |y - b|) \leq \varepsilon \|(x - a, y - b)\|_X.$$

Den Fall $n > 2$ beweist man genauso mit der Darstellung

$$\begin{aligned}f(x_1, \dots, x_n) - f(\xi_1, \dots, \xi_n) &= f(x_1, \dots, x_n) - f(\xi_1, x_2, \dots, x_n) + \\ + f(\xi_1, x_2, \dots, x_n) - f(\xi_1, \xi_2, x_3, \dots, x_n) &+ \dots + f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) - f(\xi_1, \dots, \xi_n).\end{aligned}$$

□

9.6 Geometrische Interpretation des Gradienten

(a) Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}$ ist

$$f'(\xi)(u) = \nabla f(\xi)u = \langle \nabla f(\xi), u\rangle,$$

falls man auf die Unterscheidung zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren verzichtet. Dieses Skalarpordukt erlaubt eine geometrische Interpretation durch „Winkel“, wobei $\langle a, b\rangle > 0$ einen spitzen Winkel und $\langle a, b\rangle < 0$ einen stumpfen Winkel bedeutet. Insbesondere heißen $a, b \in \mathbb{R}^n$ *orthogonal*, falls $\langle a, b\rangle = 0$.

Der Satz von Pythagoras besagt für die euklidische Norm $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$

$$\langle a, b\rangle = 0 \Longleftrightarrow \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

(b) Seien $f : A \to \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt ξ differenzierbar und $v^* = \nabla f(\xi)$. Dann ist

$$D_{v^*} f(\xi) = \max\{D_v f(\xi) : v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = \|v^*\|\},$$

das heißt: Der Gradient ist die Richung des steilsten Anstiegs.

Beweis. Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = \|v^*\|$ ist v eine zulässige Richtung mit

$$D_v f(\xi) = f'(\xi)(v) = \langle v^*, v\rangle \le \|v^*\|\|v\| = \|v^*\|^2$$

wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Für $v = v^*$ gilt Gleichheit. □

(c) Analog ist $-\nabla f(\xi)$ die Richtung des steilsten Abstiegs. Beschreibt $f : A \to \mathbb{R}$ die Höhe eines Gebirges, so ist also $-\nabla f(\xi)$ die Richtung, in die Wasser fließt. Weil Wasser immer nach unten fließt, folgt $\nabla f(\xi) = 0$, falls $f(\xi)$ minimal ist. Um dies zu beweisen, braucht man bloß partielle Differenzierbarkeit:

(d) Seien $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ξ ein innerer Punkt von A mit

$$f(\xi) = \min\{f(x) : x \in A\} \text{ oder } f(\xi) = \max\{f(x) : x \in A\}.$$

Dann gilt $D_v f(\xi) = 0$ für jede Richtung, in die f differenzierbar ist. Insbesondere gilt $\nabla f(\xi) = 0$, falls f partiell differenzierbar ist.

Beweis. Für eine (zulässige) Richtung v und $\delta > 0$ klein genug, hat auch $f \circ \varphi_{\xi,v} :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(\xi + tv)$ in $t = 0$ ein Minimum beziehungsweise Maximum, so dass

$$D_v f(\xi) = D(f \circ \varphi_{\xi,v})(0) = 0.$$ □

(e) Für $f : A \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ heißt

$$N(f, c) = \{x \in A : f(x) = c\}$$

eine *Niveaumenge*. Auf Landkarten sind zum Beispiel oft Höhenlinien eingezeichnet oder auf Wetterkarten Isobaren, das heißt Mengen gleichen Luftdrucks. Es gilt

Ist $f : A \to \mathbb{R}$ in $\xi \in N(f, c) \cap \mathring{A}$ differenzierbar, so ist $\nabla f(\xi)$ in ξ orthogonal zu $N(f, c)$.

Bevor wir dies beweisen können, müssen wir freilich erst definieren, was diese Orthgonalität heißen soll. Wir schreiben also

$$a \perp_\xi M$$

für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\xi \in M$, falls für jede in 0 differenzierbare Abbildung $\psi :]-\delta, \delta[\to M$ mit $\psi(0) = \xi$ die Bedingung $\langle a, D\psi(0)\rangle = 0$ gilt. $D\psi(0)$ ist ein sogenannter *Tangentialvektor* an M, zu all diesen soll also a orthogonal sein.

Ist nun $\psi :]-\delta,\delta[\to N(f,c)$ eine solche Abbildung, so ist $f \circ \psi$ konstant $= c$, so dass die Ableitung gleich 0 ist. Mit der Kettenregel folgt also

$$0 = (f \circ \psi)'(0)(1) = f'(\psi(0)) \circ \psi'(0)(1) = f'(\xi) \circ \psi'(0)(1) = \langle \nabla f(\xi), D\psi(0) \rangle.$$

(f) Seien $f : A \to \mathbb{R}$ in $\xi \in \overset{\circ}{A}$ differenzierbar und $M \subseteq A$ mit $\xi \in M$ und

$$f(\xi) = \min\{f(x) : x \in M\} \text{ oder } f(\xi) = \max\{f(x) : x \in M\}.$$

Dann gilt $\nabla f(\xi) \perp_\xi M$.

Beweis. Ist $\psi :]-\delta,\delta[\to M$ in 0 differenzierbar mit $\psi(0) = \xi$, so hat $f \circ \psi$ in 0 ein Extremum, so dass die Ableitung in 0 verschwindet. Wie in (e) ist also $0 = \langle \nabla f(\xi), D\psi(0) \rangle$. □

(g) Um die geometrische Bedingung in (f) analytisch auszuwerten, muss man für konkrete Mengen M – etwa Mengen der Form $M = \{x \in A : \Phi(x) = c\}$ für eine geeignete Abbildung $\Phi : A \to \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^m$ – genügend viele Tangentialvektoren $\psi'(0)$ für in 0 differenzierbare Kurven $\psi :]-\delta,\delta[\to M$ kennen. Plausibel ist es, die Vektorgleichung $\Phi(x) = c$ – also

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1,\ldots,x_n) &= c_1 \\ &\vdots \\ \Phi_m(x_1,\ldots,x_n) &= c_m \end{aligned}$$

nach m Variablen aufzulösen, weil – π mal Daumen – durch die m Gleichungen nur m der insgesamt n Variablen durch die übrigen $n-m$ Variablen festgelegt sind. Sind also die m Gleichungen in einem zu präzisierenden Sinn unabhängig, so hofft man auf eine Abbildung $g : B \to \mathbb{R}^m$ mit $B \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$, so dass

$$\Phi(x_1,\cdots,x_n) = 0 \iff (x_{n-m+1},\cdots,x_n) = g(x_1,\ldots,x_{n-m})$$

Falls g in ξ differenzierbar ist, sind die partiellen Ableitungen der Abbildung $\mathrm{Id} \times \Phi : B \to \mathbb{R}^n$, $(x_1,\ldots,x_{n-m}) \mapsto (x_1,\ldots,x_{n-m}, g(x_1,\ldots,x_{n-m}))$ Tangentialvektoren an M.

Wir wollen also (nicht-lineare) Gleichungssysteme der Form $\Phi(x) = c$ lösen und beginnen mit dem Fall $m = n$:

9.7 Satz (lokale Umkehrbarkeit).
Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $\xi \in A$ ein innerer Punkt von A, so dass $f'(\xi) \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ invertierbar ist. Dann gibt es offene Mengen $U \subseteq A$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\xi \in U$, so dass $f : U \to V$ bijektiv ist mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$. Für alle $y \in V$ gilt dann $(f^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$. Der Satz gilt analog für $f : A \to \mathbb{C}^n$ mit $A \subseteq \mathbb{C}^n$.

Bevor wir den Satz beweisen, zeigen wir an einem Beispiel, dass die Umkehrbarkeit im Allgemeinen nur auf einer kleinen Menge U gilt, selbst wenn die Voraussetzung auf ganz A erfüllt ist.

Sei dazu $f :]0,\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ x\sin(y) \end{pmatrix}$. Dann ist $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(y) & -x\sin(y) \\ \sin(y) & x\cos(y) \end{pmatrix}$ in jedem Punkt invertierbar (weil die Determinante dieser Matrix $= \cos(y)^2 x + \sin^2(y) x = x > 0$ ist). Aber wegen $f(x,y) = f(x,y+2\pi)$ ist f nicht injektiv.

Beweis. Wir erinnern zunächst an den Satz 5.29 über kleine Störungen der Identität:

> Seien U eine offene Teilmenge eines Banachraums X und $g : U \to X$ eine Kontraktion, das heißt $\|g(x) - g(y)\| \leq c\|x - y\|$ mit einem $c < 1$. Dann ist $f = \mathrm{Id} - g : U \to X$ injektiv und $f(U \cap A)$ ist offen für jede offene Menge $A \subseteq X$. Insbesondere ist $f^{-1} : f(U) \to U$ stetig.

Speziell für lineare Abbildungen $T : X \to X$ mit $|||T||| < 1$ liefert der Satz die Injektivität von $S = \mathrm{Id} - T$ und, dass das Bild $L = S(X)$ offen ist. Ist nun $B(0, r) \subseteq L$, so folgt $X = \mathrm{span}(B(0, r)) \subseteq L$, so dass S sogar bijektiv ist mit einer stetigen Inversen. Aus der Bemerkung nach 5.29 folgt darüber hinaus

$$|||S^{-1}||| \leq \frac{1}{1 - |||T|||}.$$

Für zwei Kontraktionen T und R, $S = \mathrm{Id} - T$ und $Q = \mathrm{Id} - R$ folgt dann

$$(*) \quad |||S^{-1} - Q^{-1}||| = |||S^{-1} \circ (Q - S) \circ Q^{-1}||| \leq |||S^{-1}|||\, |||Q - S|||\, |||Q^{-1}|||.$$

Nun zum Beweis des Satzes. Durch eventuellen Übergang zu $\tilde{f} = (f'(x_0))^{-1} \circ f$ können wir $f'(x_0) = \mathrm{Id}$ annehmen, so dass (in der Nähe von ξ) $f(x) \approx f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) = x - (\xi - f(\xi))$ anscheinend eine kleine (sogar fast konstante) Störung der Identität ist. Um dies zu präzisieren, wählen wir $\delta > 0$, so dass $U = B(\xi, \delta) \subseteq A$ und $|||f'(\xi) - f'(x)||| = |||\mathrm{Id} - f'(x)||| < 1/2$ für alle $x \in U$, was insbesondere die Invertierbarkeit von $f'(x)$ und $|||f'(x)^{-1}||| < 2$ liefert. Wir zeigen nun für alle $x, y \in U$

$$(**) \quad \|f(x) - f(y) - f'(\xi)(x - y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|.$$

Dazu wenden wir für $z = f(x) - f(y) - f'(\xi)(x - y)$ die Mittelwertungleichung auf $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \Re\langle f(y + t(x - y)) - f'(\xi)(y + t(x - y)), \bar{z}\rangle$ an, (wobei $\bar{z}$ der Vektor mit den konjugierten Komponenten ist – dies ist übrigens der einzige Beweisteil, in dem wir $X = \mathbb{C}^n$ verwenden), und wir erhalten für ein $s \in \,]0, 1[$ und $w = y + s(x - y) \in U$

$$\begin{aligned}
\|z\|^2 &= |\langle z, \bar{z}\rangle| = |\varphi(1) - \varphi(0)| = |\varphi'(s)| \\
&\leq |\langle f'(w)(x - y) - f'(\xi)(x - y), \bar{z}\rangle| \leq \|f'(w)(x - y) - f'(\xi)(x - y)\|\, \|\bar{z}\| \\
&= |||f(w) - f'(\xi)|||\, \|x - y\|\, \|z\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|\, \|z\|.
\end{aligned}$$

Wegen $f'(\xi) = \mathrm{Id}$ besagt $(**)$, dass $\mathrm{Id} - f : U \to X$ eine Kontraktion ist, und wegen Satz 5.29 ist $f : U \to V$ mit $V = f(U)$ eine Bijektion zwischen offenen Mengen mit stetiger Umkehrfunktion $g = f^{-1} : V \to U$. Ähnlich wie in Satz 7.4 [*] impliziert dies die Differenzierbarkeit von f^{-1} mit $(f^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$. Ist schließlich f' auf ganz U stetig, so ist $(f^{-1})'$ wegen $(*)$ auf V stetig. $\square$

---

[*] Seien $y_0 = f(x_0) \in V$ und $y = f(x) \in V$ und r wie in 9.2(d) für f in Punkt x_0. Mit $C = |||f'(x_0)^{-1}|||$ gilt dann

$$\begin{aligned}
e(y) &= \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - f'(x_0)^{-1}(y - y_0)\| = \| - f'(x_0)^{-1}(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))\| \\
&\leq C\|x - x_0\|\, \|r(x)\| \leq C\|r(f^{-1}(y))\|(e(y) + \|f'(x_0)^{-1}(y - y_0)\|) \\
&\leq \frac{1}{2}e(y) + C^2\|r(f^{-1}(y))\|\, \|y - y_0\|
\end{aligned}$$

für y nah genug bei y_0. Dies impliziert $e(y) \leq 2C^2\|r(f^{-1}(y))\|\, \|y - y_0\|$.

Als nächstes wollen wir „unterbestimmte“ Gleichungssysteme

$$\Phi(x,y) = c$$

für $\Phi : A \to \mathbb{R}^m$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$ lösen. Für zwei Banach-Räume $X (= \mathbb{R}^k)$ und $Y (= \mathbb{R}^m)$ versehen wir $X \times Y$ mit der Norm $\|(x,y)\| = (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)^{1/2}$.

Für $(\xi,\eta) \in A \subseteq X \times Y$ und dort differenzierbares $\Phi : A \to Y$ setzen wir

$$\Phi'_I(\xi,\eta)(u) = \Phi'(\xi,\eta)(u,0) \text{ und } \Phi'_{II}(\xi,\eta)(v) = \Phi'(\xi,\eta)(0,v), \text{ so dass}$$

$$\Phi'(\xi,\eta)(u,v) = \Phi'_I(\xi,\eta)(u) + \Phi'_{II}(\xi,\eta)(v).$$

Im speziellen Fall $X = \mathbb{R}^k$ und $Y = \mathbb{R}^m$ gilt dann

$$\Phi'_I(\xi,\eta)(u) = \sum_{j=1}^{k} D_j f(\xi,\eta) u_j \text{ und } \Phi'_{II}(\xi,\eta)(v) = \sum_{j=1}^{m} D_{k+j} f(\xi,\eta) v_j,$$

das heißt, die Zerlegung von $\Phi'(\xi)$ entspricht einer Zerlegung des Gradienten.

9.8 Satz (implizite Funktionen).
Seien $A \subseteq X \times Y$ offen, $\Phi : A \to Y$ stetig differenzierbar, $c \in Y$ und $(\xi,\eta) \in A$ mit $\Phi(\xi,\eta) = c$, so dass $\Phi'_{II}(\xi,\eta) : Y \to Y$ invertierbar ist.
Dann gibt es offene Mengen $V \subseteq X$ und $W \subseteq Y$ mit $(\xi,\eta) \in V \times W \subseteq A$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : V \to W$, so dass für alle $(x,y) \in V \times W$ gilt

$$\Phi(x,y) = c \Leftrightarrow y = g(x).$$

Außerdem ist $g'(x) = -\Phi'_{II}(x,g(x))^{-1} \circ \Phi'_I(x,g(x))$ für alle $x \in V$.

Beweis. Seien $\pi_I : X \times Y \to X$ und $\pi_{II} : X \times Y \to Y$ die Projektionen auf X beziehungsweise Y und

$$F = \pi_I \times \Phi : A \to X \times Y, (x,y) \mapsto (x, \Phi(x,y)).$$

Dann ist F in (ξ,η) differenzierbar mit

$$F'(\xi,\eta) = \pi'_I(\xi,\eta) \times \Phi'(\xi,\eta) = \pi_I \times \Phi'(\xi,\eta)$$

also $F'(\xi,\eta)(u,v) = (u, \Phi'_I(\xi,\eta)(u) + \Phi'_{II}(\xi,\eta)(v))$.

$F'(\xi,\eta)$ ist invertierbar mit Inverser $(a,b) \mapsto (a, \Phi'_{II}(\xi,\eta)^{-1}(b - \Phi'_I(\xi,\eta)(a)))$, und der Satz über lokale Umkehrbarkeit liefert offene Mengen $U \subseteq X \times Y$ und $\tilde{V} \subseteq X \times Y$ mit $(\xi,\eta) \in U \subseteq A$, so dass $F : U \to V$ eine stetig differenzierbare Inverse F^{-1} hat.

Sei nun $V = \{x \in X : (x,c) \in \tilde{V}\}$ und $W = \pi_{II}(U) = \{y \in Y : \exists\, x \in X \text{ mit } (x,y) \in A\}$ sowie

$$g : V \to W, x \mapsto \pi_{II}(F^{-1}(x,c)).$$

Dann ist g stetig differenzierbar und für $(x,y) \in V \times W$ gilt

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) = c &\Leftrightarrow F(x,y) = (x,c) \Leftrightarrow (x,y) = F^{-1}(x,c)\\ &\Leftrightarrow \Big(x = \pi_I(F^{-1}(x,c)) \text{ und } y = \pi_{II}(F^{-1}(x,c))\Big) \Leftrightarrow y = g(x).\end{aligned}$$

Um schließlich $g'(x)$ auszurechnen, benutzen wir, dass $\Phi \circ (\mathrm{Id} \times g) : V \to Y, x \mapsto \Phi(x,g(x))$ konstant ist, und erhalten

$$0 = (\Phi \circ (\mathrm{Id} \times g))'(x) = \Phi'(x,g(x)) \circ (\mathrm{Id}'(x) \times g'(x)) = \Phi'_I(x,g(x)) + \Phi'_{II}(x,g(x)) \circ g'(x).$$

Dies impliziert $g'(x) = -\Phi'_{II}(x, g(x))^{-1} \circ \Phi'_I(x, g(x))$. $\square$

9.9 Satz (Lagrange).

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ *und* $\Phi : A \to \mathbb{R}^m$ *beide stetig differenzierbar und* $\xi \in \overset{\circ}{A}$ *mit* $\Phi(\xi) = c \in \mathbb{R}^m$, *so dass* $f(\xi) = \min\{f(x) : x \in A, \Phi(x) = c\}$ *oder* $f(\xi) = \max\{\dots\}$. *Ist* $\Phi'(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *surjektiv, so gibt es „Lagrange-Multiplikatoren"* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *mit*

$$f'(\xi) = \lambda_1 \Phi'_1(\xi) + \dots + \lambda_m \Phi'_m(\xi).$$

Bemerkung. Die Surjektivität von $\Phi'(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$u \mapsto \nabla\Phi(\xi)u = D_1\Phi(\xi)u_1 + \dots + D_n\Phi(\xi)u_n$$

bedeutet, dass es m linear unabhängige partielle Ableitungen $D_\ell\Phi(\xi)$ (= Spalten der $m \times n$-Matrix $\nabla\Phi(\xi)$) gibt, oder dass diese Jacobi-Matrix Rang m hat (was insbesondere $n \geq m$ impliziert). Ist dies nicht der Fall (wie etwa für $\Phi(x) = \|x\|^2$ und $\xi = 0$ – dann ist $\Phi'(0) = 0$ und $\{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = 0\} = \{0\}$), so macht der Satz keine Aussage.

In der Praxis ist der Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ gesucht. Der Satz gibt dann die $n + m$ Gleichungen

$$\begin{aligned}
D_1 f(\xi) &= \sum_{k=1}^m \lambda_k D_1 \Phi_k(\xi) \\
&\vdots \\
D_n f(\xi) &= \sum_{k=1}^m \lambda_k D_n \Phi_k(\xi) \\
\Phi_1(\xi) &= c_1 \\
&\vdots \\
\Phi_m(\xi) &= c_m
\end{aligned}$$

für die $n + m$ Unbekannten $\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ (wobei man die Lagrange-Multiplikatoren in der Praxis gar nicht auszurechnen braucht).

Beispiel. Wir suchen Minima und Maxima von $f(x, y, z) = 2x + y + z$ unter der Nebenbedingung $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Es gilt $\nabla f(x, y, z) = (2, 1, 1)$ und $\nabla\Phi(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq 0$ für $\Phi(x, y, z) = 1$. Notwendig ist also die Existenz von $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x, y, z) = \lambda\Phi(x, y, z)$, also

$$\begin{aligned}
2 &= 2\lambda x \\
1 &= 2\lambda y \\
1 &= 2\lambda z \\
1 &= x^2 + y^2 + z^2.
\end{aligned}$$

Dann sind $\lambda \neq 0$, $y = z$ und $x = 2y$. Mit der letzten Gleichung folgt $6y^2 = 1$ also $y = \sqrt{1/6}$ oder $y = -\sqrt{1/6}$. Die Kandidaten für Extrema sind also $\xi = (2/\sqrt{6}), 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$ und $\eta = -\xi$. Durch Vergleich der Funktionswerte erhält man

$$f(\xi) = \max\{f(x) : \Phi(x) = 1\} \text{ und } f(\eta) = \min\{f(x) : \Phi(x) = 1\},$$

weil wegen der Kompaktheit von $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : \Phi(x) = 1\}$ und der Stetigkeit von f die Extrema angenommen werden.

Beweis. Durch Permutation der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ können wir annehmen, dass die letzten m partiellen Ableitungen $D_{n-m+1}\Phi(\xi), \ldots, D_n\Phi(\xi)$ linear unabhängig sind, so dass $\Phi'_{II}(\xi) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ invertierbar ist. Wegen des Satzes über implizite Funktionen können wir daher die Nebenbedingung $\Phi = c$ auflösen. Wir schreiben $\xi = (a, b) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ sowie $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ und erhalten $V \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ und $W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen mit $\xi = (a, c) \subseteq V \times W \subseteq A$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : V \to W$, so dass für $(x, y) \in V \times W$ gilt $\Phi(x, y) = c \Leftrightarrow y = g(x)$.

Dann hat also die Funktion $h = f \circ (\mathrm{Id}_V \times g) : V \to \mathbb{R}$ ein Minimum in $a \in V$, so dass $h'(a) = 0$. Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} 0 =& h'(a) = f'(a, g(a)) \circ (\mathrm{Id}'_V(a) \times g'(a)) = f'(\xi) \circ (\mathrm{Id}_V \times g'(a)) \\ =& f'_I(\xi) + f'_{II}(\xi) \circ g'(a) = f'_I(\xi) - f'_{II}(\xi) \circ \Phi'_{II}(\xi)^{-1} \circ \Phi'_I(\xi). \end{aligned}$$

Für $T = f'_{II}(\xi) \circ \Phi'_{II}(\xi)^{-1} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ gelten also

$$\begin{aligned} &f'_I(\xi) = T \circ \Phi'_I(\xi) \text{ und } f'_{II}(\xi) = T \circ \Phi'_{II}(\xi) \text{ und daher} \\ &f'(\xi) = T \circ \Phi'(\xi) = T \circ (\Phi'_1(\xi) \times \cdots \times \Phi'_m(\xi)). \end{aligned}$$

Mit $\lambda_k = T(e_k)$ gilt $T(v) = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k v_k$ also $f'(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \Phi'_k(\xi)$. □

Bemerkung. Hier ein alternatives, geometrisches Argument. Für die „Parametrisierung“ $p = \mathrm{Id}_V \times g$ sind die partiellen Ableitungen $D_1p(a), \ldots, D_{n-m}p(a)$ linear unabhängige Tangentialvektoren und $\nabla\Phi_1(\xi), \ldots, \nabla\Phi_m(\xi)$ sind linear unabhängig und orthogonal zu den Tangentialvektoren. Deshalb bilden $\nabla\Phi_1(\xi), \ldots, \nabla\Phi_m(\xi)$ eine Basis des „Orthogonalraums“ $L = \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp_\xi M\}$ mit $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = c\}$. Nach 9.6(f) ist andererseits $\nabla f(\xi) \in L$ und daher eine Linearkombination der Basisvektoren.

Zum Abschluss noch ein Satz über höhere Ableitungen:

9.10 Satz (Schwarz).
Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : A \to \mathbb{C}^m$ stetig differenzierbar, so dass alle partiellen Ableitungen $D_j f : A \to \mathbb{C}^m$ wiederum stetig differenzierbar sind. Dann gilt für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$

$$D_k D_j f = D_j D_k f.$$

Beweis. Wegen Satz 9.3(d) reicht der Fall $m = 1$ und durch Übergang zu $\varphi(s, t) = f(\xi + se_k + te_j)$ können wir $\xi = 0$ und $n = 2$ annehmen, das heißt wir müssen für offenes $A \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $0 \in A$ zeigen, dass $D_1D_2f = D_2D_1f$ gilt. Für $|x|$ und $|y|$ klein genug definieren wir

$$F(x, y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y D_1D_2f(s, t)dtds \text{ und } G(x, y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y D_2D_1f(s, t)dtds.$$

Wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist

$$G(x, y) = \int\limits_0^x D_1f(s, y) - D_1f(s, 0)ds = f(x, y) - f(0, y) - f(x, 0) + f(0, 0).$$

Andererseits ist wegen Satz 8.9 über die Differentiation von Parameterintegralen

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^x D_1 \int_0^y D_2 f(s,t)dtds = \int_0^x D_1(f(s,y)-f(s,0))ds \\ &= f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0) = G(x,y). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$D_1D_2f = D_2D_1F = D_2D_1G = D_2D_1f. \qquad \square$$

9.11 Höhere Ableitungen

(a) Wir schreiben $f \in C^p(A,\mathbb{C}^m)$, falls $D_jf \in C^{p-1}(A,\mathbb{C}^m)$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$. Für $f \in C^2(A,Y)$ (mit $Y = \mathbb{C}^m$) heißt die Matrix

$$H_f(x) = (D_jD_kf(x))_{j,k\in\{1,\dots,n\}} \in Y^{n\times n}$$

die *Hesse-Matrix* von f in x. Wegen Satz 9.10 ist $H_f(x)$ also symmetrisch. Für $u,v \in \mathbb{R}^n$ gelten

$$D_vf(x) = \sum_{j=1}^n v_jD_jf(x) \text{ und}$$

$$D_uD_vf(x) = \sum_{j,k=1}^n v_ju_kD_kD_jf(x) = u^tH_f(x)v.$$

(b) Viele Aussagen über höhere Ableitungen (wie zum Beispiel die Charakterisierung der Konvexität in 7.18 (b) durch $\varphi'' \geq 0$) kann man auf $f \in C^2(A,\mathbb{R})$ übertragen, indem man den eindimensionalen Fall auf $\varphi(t) = f(x+tv)$ anwendet. Die Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} D\varphi(t) &= \sum_{j=1}^n D_jf(x+tv)v_j \text{ und } DD\varphi(t) = \sum_{j,k=1}^n D_kD_jf(x+tv)v_jv_k \\ &= v^tH_f(x+tv)v. \end{aligned}$$

Damit erhält man

(c) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und offen. Eine Funktion $f \in C^2(A,\mathbb{R})$ ist genau dann konvex, wenn für alle $x \in A$ und $v \in \mathbb{R}$

$$v^tH_f(x)v \geq 0, \text{ das heißt } H_f(x) \text{ ist positiv definit.}$$

(d) Die Ableitung von f ist eine Abbildung mit Werten in dem (wie üblich normierten) Raum $L(X,Y)$, also $f' : A \to L(X,Y)$. Für $f \in C^2(A,Y)$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist f' tatsächlich wieder differenzierbar mit $f''(x) \in L(X,L(X,Y))$, nämlich $f''(x)(u)(v) = D_uD_vf(x)$.