

Differentialgleichung
Übungsblatt 9

Abgabe: Mittwoch, 01.07.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Mittwoch, 01.07.2015, 8:30-10:00 Uhr und 10:15-11:45 Uhr, E45

Aufgabe 33 (5 Punkte)

Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine berandete n -dim. C^k -Mfk, W eine offene Obermenge von M und $F : W \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine C^k -Einbettung ($d \geq m$). Zeigen Sie, dass $F(M)$ eine berandete n -dim. C^k -Mfk mit $\partial F(M) = F(\partial M)$ ist.

Aufgabe 34 (5 Punkte)

Es seien $I = [a, b]$ ein Intervall und $f \in C^k(I,]0, \infty[)$.
Zeigen Sie, dass der Rotationskörper

$$R_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times I : x^2 + y^2 = f(z)^2\}$$

eine 2-dim. C^k -Mfk. ist. Geben Sie außerdem ∂R_f an.

Hinweis: Betrachten Sie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (f(z)x, f(z)y, z)$ auf einer geeigneten C^k -Mfk. $M \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass $F(M) = R_f$.

Aufgabe 35 (5 Punkte)

Für $S^n := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \|y\|_{n+1} = 1\}$ seien $S_N^n := S^n \setminus \{e_{n+1}\}$ sowie

$$\begin{aligned}\psi_1 : \mathbb{R}^n &\rightarrow S_N^n, \psi_1(x) := \frac{(2x_1, \dots, 2x_n, \|x\|_n^2 - 1)}{\|x\|_n^2 + 1}, \\ \varphi_1 : S_N^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi_1(y) := \frac{(y_1, \dots, y_n)}{1 - y_{n+1}}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass ψ_1 eine lokale Parametrisierung für $y \in S_N^n$ ist und geben Sie eine Basis des Tangentialraumes $T_y S^n$ an.

Hinweis: Rechnen Sie nach, dass ψ_1 und φ_1 jeweils invers zueinander sind.

Aufgabe 36 (5 Punkte)

Es seien I ein offenes Intervall, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in C(I, \mathbb{R})$.

Zeigen Sie, dass $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ genau dann eine Lösung von

$$\begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) & -a_2(t) \\ a_2(t) & a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

ist, wenn $\psi = \varphi_1 + i\varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung von

$$\psi'(t) = \alpha(t)\psi(t) + \beta(t) \quad (2)$$

ist, wobei $\alpha := a_1 + ia_2$ und $\beta = b_1 + ib_2$.