J. Wengenroth
T. Schlierkamp

SS 2015
09.06.2015

Differentialgleichung
Übungsblatt 7

Abgabe: Mittwoch, 17.06.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Mittwoch, 17.06.2015, 8:30-10:00 Uhr und 10:15-11:45 Uhr, E45

Aufgabe 25 (4+2 Punkte)

(a) Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$. Zeigen Sie

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

Wieso ist $\exp(A)$ stets regulär? Was ist $\exp(A)^{-1}$?

(b) Gilt die Gleichheit in (a) auch für beliebige Matrizen?
Hinweis: Betrachten Sie $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 26 (5 Punkte)
Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

Berechnen Sie die Picard-Lindelöf-Iterierten zum AWP $u' = Au$, $u(0) = u_0 \in \mathbb{C}^m$ und bestimmen Sie $\exp(tA)$ einerseits mit Aufgabe 25 und andererseits durch explizites Berechnen einer Lösung des AWPs.
Hinweis: Welches AWP löst die letzte Komponente?

Aufgabe 27 (2+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie für eine Blockdiagonalmatrix $J = \mathrm{diag}(J_1, ..., J_k) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Matrizen $J_l \in \mathbb{C}^{\mu_l\times\mu_l}$ ($\mu_l \in \mathbb{N}$, $\sum_{l=1}^k \mu_l = n$) die Gleichheit:

$$\exp(\mathrm{diag}(J_1, ..., J_k)) = \mathrm{diag}(\exp(J_1), ..., \exp(J_k))$$

(b) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Leiten Sie eine Formel für $\exp(tA)$ her, in der nur noch Exponentialmatrizen von nilpotenten Matrizen auftauchen.

Hinweis zu (b): Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es eine reguläre Matrix $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und eine Blockdiagonalmatrix $J = \mathrm{diag}(J_1, ..., J_k) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (Jordannormalform), so dass $A = PJP^{-1}$. Der l-te Eigenwert λ_l mit algebraischer Vielfachheit $\mu_l \in \mathbb{N}$ liefert den Jordanblock J_l mit λ_l auf der Diagonalen und 1 auf der oberen Nebendiagonalen (wie in A26).

Bitte wenden

Aufgabe 28 (4 Punkte)
In der Situation des Satzes von Peano besitze das AWP

$$u'(t) = \Phi(t, u(t)), \qquad u(t_0) = u_0$$

eine eindeutige Lösung. Zeigen Sie, dass die Folge u_n der Eulerschen Polygonzüge gleichmäßig gegen die Lösung konvergiert.
Hinweis: Man zeige zunächst, dass eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum genau dann gegen u_∞ konvergiert, wenn jede Teilfolge $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen u_∞ konvergente Teilfolge $(u_{\psi(\varphi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt.