J. Wengenroth
T. Schlierkamp

SS 2015
02.06.2015

Differentialgleichung
Übungsblatt 6

Abgabe: Mittwoch, 10.06.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Mittwoch, 10.06.2015, 8:30-10:00 Uhr und 10:15-11:45 Uhr, E45

Aufgabe 21 (4 Punkte)
Betrachten Sie wieder einmal das Fliegenproblem. Die Geschwindigkeiten sind gegeben durch

$$u_j' = u_{j+1} - u_j \quad (j = 1, 2, 3, 4;\ u_5 = u_1).$$

Schreiben Sie dieses System als lineare vektorwertige DGL mit Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times4}$ und berechnen Sie eine Lösung des zugehörigen AWPs $u_k(0) = i^{k-1}$ mithilfe von Aufgabe 19. *Zur Diagonalisierung dürfen und (sollten Sie) WolframAlpha, Matlab oder Mathematica benutzen.*

Aufgabe 22 (2+3 Punkte)

(a) Es sei $u \in C^2(I)$ eine Lösung von $L(u) = 0$, wobei

$$L(u)(t) := u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) \quad (a_0, a_1 \in C(I)).$$

Für $c \in C^2(I)$ sei $v(t) := u(t)c(t)$.
Bestimmen Sie gemäß Satz 3.5 eine DGL $\tilde{L}$ von 1. Ordnung, so dass $L(v) = 0$ äquivalent dazu ist, dass $w = c'$ diese DGL löst.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der DGL

$$u'' - \frac{1}{t^2}u' + \frac{1}{t^3}u = 0$$

auf $I =]0, \infty[$ (indem Sie eine Lösung raten und zu einem FS ergänzen).

Aufgabe 23 (4+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie für eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Formel

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{spur}(A)),$$

wobei $\mathrm{spur}(A) := \sum_{j=1}^n a_{jj}$. Beweisen Sie dazu $\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA)$ sowie $\exp(S^{-1}AS) = S^{-1}\exp(A)S$ für beliebige $A, B, S \in \mathbb{C}^{n\times n}$, S regulär.

(b) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, der $\Re(\lambda) > 0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass es eine unbeschränkte Lösung der DGL $u' = Au$ gibt.

Aufgabe 24 (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen $u \in C^3(]0, \infty[)$ der Eulerschen DGL

$$t^3u'''(t) + 4t^2u''(t) + tu'(t) - u(t) = 0.$$