

**Differentialgleichung
Übungsblatt 5**

Abgabe: Mittwoch, 03.06.2015 bis 8:30 Uhr, Übungskasten 5
Übungen: Mittwoch, 03.06.2015, 8:30-10:00 Uhr und 10:15-11:45 Uhr, E45

Aufgabe 17 (4 Punkte)

Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ explizit die Picard-Lindelöf Iterierten zur DGL $u' = Au$ mit Anfangswerten $u(0) = u_0 \in \mathbb{C}^2$. Geben Sie auch explizite Formeln für die beiden Komponenten der Lösung an.

Aufgabe 18 (3+2+2 Punkte)

- (a) Es seien $j \in \mathbb{N}$, $u \in C^j([0, \infty[)$ und $v := u \circ \exp$. Zeigen Sie es gibt $\lambda_{k,j} \geq 1$ ($k = 1, \dots, j$), so dass $v^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^j \lambda_{k,j} e^{kt} u^{(k)}(e^t)$.
- (b) Zu $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ sei $u \in C^n([0, \infty[)$ eine Lösung der **Eulerschen DGL**

$$\sum_{j=0}^n a_j t^j u^{(j)}(t) = 0. \quad (E)$$

Zeigen Sie, dass es $b = (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ gibt, so dass $v := u \circ \exp$ eine Lösung der folgenden linearen DGL auf $\mathbb{R}$ ist:

$$\sum_{j=0}^n b_j v^{(j)}(t) = 0. \quad (L)$$

- (c) Zeigen Sie, dass für jede weitere Lösung $w \in C^n(\mathbb{R})$ von (L) die Funktion $\tilde{u} := w \circ \log$ eine Lösung der Eulerschen DGL (E) ist.

Hinweis: (a) Mit welcher Beweistechnik zeigt man Aussagen für $j \in \mathbb{N}$ häufig?

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Seien $b \in \mathbb{C}^m$ und $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ diagonalisierbar ($\exists S, D \in \mathbb{C}^{m \times m}$, S invertierbar und D diagonal mit $S^{-1}AS = D$). Zeigen Sie, dass eine Funktion $u : I \rightarrow \mathbb{C}^m$ die DGL $u' = Au + b$ genau dann löst, wenn $v = S^{-1}u$ eine Lösung der DGL $v' = Dv + S^{-1}b$ ist. Geben Sie Formeln für Lösungen der zweiten DGL sowie (mittels Transformation) der ersten DGL an.

Bitte wenden

Aufgabe 20 (5 Punkte)

Ab einer gewissen kritischen Geschwindigkeit geht die an einem Körper vorbeiziehende Luftströmung in eine turbulente über. Dann ist die Reibungskraft durch den Luftwiderstand proportional zur Geschwindigkeit im Quadrat. Für einen fallenden Körper mit Masse $m > 0$ ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$u''(t) = \frac{\rho}{m}(u'(t))^2 - g \quad (\rho > 0).$$

Die maximale Geschwindigkeit beträgt damit $v_\infty := \sqrt{\frac{mg}{\rho}}$ (nicht nötig zu zeigen). Lösen Sie das zugehörige AWP mit $u(0) = 0$, $u'(0) = v_0 \in J :=]-v_\infty, v_\infty[$.

Hinweise:

- 1.) Führen Sie das Problem für $v := u'$ zunächst auf die DGL $v' = c(1 - v^2)$ ($c \neq 0$) zurück und lösen Sie diese mithilfe von A14.
- 2.) Überlegen Sie sich, wie die Anfangswerte erfüllt werden.
- 3.) Integrieren Sie die Geschwindigkeitsfunktion v .